

Aula 11

*TJ-SP (Escrevente Judiciário) Raciocínio
Lógico e Matemática - 2024 (Pós-Edital)*

Autor:
**Equipe Exatas Estratégia
Concursos**

30 de Maio de 2024



Índice

1) Frações	3
2) Razão e Proporção	44
3) Proporcionalidade	75
4) Questões Comentadas - Frações - Vunesp	97
5) Questões Comentadas - Razão e Proporção - Vunesp	125
6) Questões Comentadas - Proporcionalidade - Vunesp	153
7) Lista de Questões - Frações - Vunesp	181
8) Lista de Questões - Razão e Proporção - Vunesp	189
9) Lista de Questões - Proporcionalidade - Vunesp	198



FRAÇÕES

Frações

Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Múltiplos de um número

Um número inteiro **A** é **múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito por $B \times k$** , sendo **k** um número inteiro.

Exemplo: os números da forma **$A = 7 \times k$** são múltiplos **de 7** (sendo **k** inteiro).

Números primos

Números primos são números naturais maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais: o **número 1** e o **próprio número primo**.

- Os 15 primeiros números primos são: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.**

Decomposição em fatores primos

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos;
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que **todos** os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

- Quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que **a é múltiplo de b**, podemos eliminar **b** do cálculo do MMC.
- Se tivermos **N** números e um deles é **múltiplo de todos os outros**, esse número é o **MMC**.



Introdução às frações

$$\frac{a}{b} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \end{array}$$

Considere uma fração com um numerador inteiro a e com um denominador inteiro b , representada por $\frac{a}{b}$. Dizemos que a fração é **irredutível** quando a e b **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando a e b **são primos entre si**.

Para **somar e subtrair** frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes com o mesmo denominador**.

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação.

Para **comparar frações**, devemos encontrar frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador.

Problemas envolvendo frações

A palavra "**de**" costuma significar uma **multiplicação**.

Uma forma prática de se **obter o todo a partir da parte** do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".

Dada uma fração a/b , a **fração complementar** corresponde a $1 - a/b$.

Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**.

Dízima periódica

O **período** é a porção que se repete em uma dízima periódica.

- Um número da forma $0,AAA \dots = 0,\overline{A}$ corresponde a $\frac{A}{9}$;
- Um número da forma $0,ABABAB \dots = 0,\overline{AB}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número da forma $0,ABCABCABC \dots = 0,\overline{ABC}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos.



Revisão sobre Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Pessoal, antes de iniciarmos o conteúdo de frações propriamente dito, vamos fazer uma breve **revisão sobre múltiplos, números primos, decomposição em fatores primos e Mínimo Múltiplo Comum (MMC)**. É muito importante que você tenha conhecimento sobre esses assuntos, pois eles serão necessários para que façamos operações com frações.



Caso você já saiba calcular o MMC entre quaisquer números, fique à vontade para pular esse tópico.

Múltiplos de um número

Considere o número 7. Os **múltiplos do número 7** são:

$$7 \times 0 = 0$$

$$7 \times 1 = 7$$

$$7 \times 2 = 14$$

$$7 \times 3 = 21$$

...

Perceba que um número qualquer apresenta infinitos múltiplos. O número 462, por exemplo, é múltiplo de 7, pois:

$$7 \times 66 = 462$$

Note que todos os números da forma $A = 7 \times k$ são múltiplos **de 7** (sendo k um número inteiro).



Um número inteiro **A é múltiplo de um número inteiro B** quando **A pode ser descrito pelo produto $B \times k$** , sendo k um número inteiro.

Tudo certo quanto ao conceito de múltiplos? Ok, agora vamos falar de números primos.



Números primos

Os números primos são números **naturais** maiores do que 1 que possuem **somente dois divisores** naturais:

- O número 1; e
- O próprio número primo.

Isso significa que, se um número natural X é primo, apenas o número 1 e o próprio número X podem dividir X deixando resto zero.

Existem infinitos números primos. É importante que você **DECORE** os 15 primeiros.



Os 15 primeiros números primos são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Decomposição em fatores primos

Decompor um número qualquer em fatores primos significa **escrevê-lo como um produto de números primos**. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número 60 é:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Para decompor um número em fatores primos, devemos dividir o número em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que o número obtido não for divisível pelo primo selecionado.

Vejamos alguns exemplos:

Decomponha o número 500 em fatores primos

- Ao dividir 500 por 2, obtemos 250.
- Ao dividir 250 por 2, obtemos 125.
- Note que 125 não é mais divisível por 2 (não é par). **Passemos ao 3.**
- Note que 125 não é divisível por 3 (1+2+5 não é divisível por 3). **Passemos ao 5.**
- Ao dividir 125 por 5, obtemos 25.
- Ao dividir 25 por 5, obtemos 5.
- Ao dividir 5 por 5, **obtemos 1. Nesse momento, devemos parar as divisões sucessivas.**



$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 500 em fatores primos é:

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$500 = 2^2 \times 5^3$$

Decomponha o número 282 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 282 & 2 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 282 em fatores primos é:

$$282 = 2 \times 3 \times 47$$

Decomponha o número 3960 em fatores primos

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a decomposição de 3960 em fatores primos é:

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

Existe uma **forma não metodológica** de se obter a decomposição em fatores primos. Essa forma **costuma ser mais rápida** especialmente para números mais simples. Por exemplo, vamos decompor o número 500. Acompanhe o raciocínio:



$$\begin{aligned} 500 &= 5 \times 100 \\ &= 5 \times 10 \times 10 \\ &= 5 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \\ &= 2^2 \times 5^3 \end{aligned}$$

Note que usamos o fato de 500 ser facilmente descrito por 5×100 para decompor o número de uma forma não metodológica.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

O **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** entre **N** números é o **menor** dos **múltiplos** que é comum a todos os números.

Representaremos o **MMC** entre os números **a**, **b** e **c** por MMC (a; b; c).

Para obter o **MMC** entre **N** números, devemos proceder do seguinte modo:

- Decompor todos os números em fatores primos; e
- Selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

Vamos a alguns exemplos:

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50.

Primeiramente, devemos decompor todos os números em fatores primos.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$\begin{aligned} 20 &= 2 \times 10 \\ &= 2^2 \times 5^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50 &= 5 \times 10 \\ &= 2^1 \times 5^2 \end{aligned}$$



Devemos selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$5 = 5^1$$

$$10 = 2^1 \times 5^1$$

$$15 = 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2^2 \times 5^1$$

$$50 = 2^1 \times 5^2$$

$$\text{Logo, MMC}(5; 10; 15; 20; 50) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300.$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50

Vamos decompor os 3 números em fatores primos, selecionar **todos** os números primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$21 = 3 \times 7$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$50 = 2 \times 5^2$$

$$\text{Logo, MMC}(21; 45; 50) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150.$$

Existe um método prático para determinar o MMC entre **N** números. Trata-se do **método da decomposição simultânea em fatores primos**.

Para realizar a decomposição simultânea de **N** números em fatores primos, devemos dividir simultaneamente os números em questão sucessivas vezes pelos números primos na sequência 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., mudando de número primo sempre que todos os números obtidos não forem divisíveis pelo primo selecionado.

Calcule o MMC entre 5, 10, 15, 20 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

- Ao dividir os números 5, 10, 15, 20 e 50 **por 2**, obtemos 5, 5, 15, 10 e 25.
- Ao dividir os números 5, 5, 15, 10 e 25 **por 2**, obtemos 5, 5, 15, 5 e 25.
- Note que nenhum dos números dentre 5, 5, 15, 5 e 25 é divisível por 2. **Passemos ao 3.**
- Ao dividir os números 5, 5, 15, 5 e 25 **por 3**, obtemos 5, 5, 5, 5 e 25.
- Note que nenhum dos números dentre 5, 5, 5, 5 e 25 é divisível por 3. **Passemos ao 5.**
- Ao dividir os números 5, 5, 5, 5 e 25 **por 5**, obtemos 1, 1, 1, 1 e 5.
- Ao dividir os números 1, 1, 1, 1 e 5 **por 5**, obtemos 1, 1, 1, 1 e 1. **Nesse momento, devemos parar a divisão simultânea.**



Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 5, 10, 15, 20, 50 & 2 \\ 5, 5, 15, 10, 25 & 2 \\ 5, 5, 15, 5, 25 & 3 \\ 5, 5, 5, 5, 25 & 5 \\ 1, 1, 1, 1, 5 & 5 \\ 1, 1, 1, 1, 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** é o seguinte produto:

$$\begin{aligned} \text{MMC}(5; 10; 15; 20; 50) &= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ &= 300 \end{aligned}$$

Calcule o MMC entre 21, 45 e 50 pelo método da decomposição simultânea em fatores primos

Temos a seguinte representação da decomposição simultânea:

$$\begin{array}{r|l} 21, 45, 50 & 2 \\ 21, 45, 25 & 3 \\ 7, 15, 25 & 3 \\ 7, 5, 25 & 5 \\ 7, 1, 5 & 5 \\ 7, 1, 1 & 7 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

O **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** é o seguinte produto:

$$\begin{aligned} \text{MMC}(21; 45; 50) &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \\ &= 3150 \end{aligned}$$

Uma dica importante que pode economizar um certo tempo em prova é a seguinte: quando temos que realizar um **MMC** de **N** números e no meio desses números temos que **a é múltiplo** de **b**, podemos eliminar **b** do cálculo do MMC.

Vejamos dois exemplos:



Calcule o MMC de 40, 30 e 15

Ao calcular o MMC(40; 30; 15), perceba que **30** é **múltiplo de 15**. Logo:

$$\text{MMC}(40; \mathbf{30}; \mathbf{15}) = \text{MMC}(40; \mathbf{30})$$

Calcular o MMC de 40 e 30 é mais rápido, não é mesmo?

Calcule o MMC de 390, 130 e 75

Ao calcular o MMC(390; 130; 75), perceba que **390** é **múltiplo de 130**. Logo:

$$\text{MMC}(\mathbf{390}; \mathbf{130}; 75) = \text{MMC}(\mathbf{390}; 75)$$

Calcular o MMC de 390 e 75 é mais rápido, não é mesmo?

Perceba que se tivermos **N** números e **um deles é múltiplo de todos os outros**, esse número é o MMC.

Calcule o MMC de 3, 6 e 12

Note que 12 é múltiplo de 3 e de 6. Logo:

$$\text{MMC}(3; 6; 12) = 12$$

Calcule o MMC de 120, 60 e 15

Note que 120 é múltiplo de 60 e de 15. Logo:

$$\text{MMC}(120; 60; 15) = 120$$

Feito! Agora que sabemos calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre quaisquer números, vamos ao conteúdo sobre frações.



Introdução às frações

Conceitos preliminares

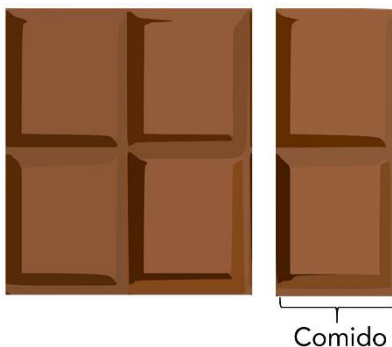
A assimilação plena do conceito de frações é fundamental para se entender diversos outros assuntos de matemática. Para ilustrar a ideia, considere a barra de chocolate a seguir com 6 pedaços.



Comer $\frac{5}{6}$ (cinco sextos) da barra de chocolate significa comer 5 dos 6 pedaços. Para o caso em questão, $\frac{5}{6}$ representa a seguinte parte que foi comida:



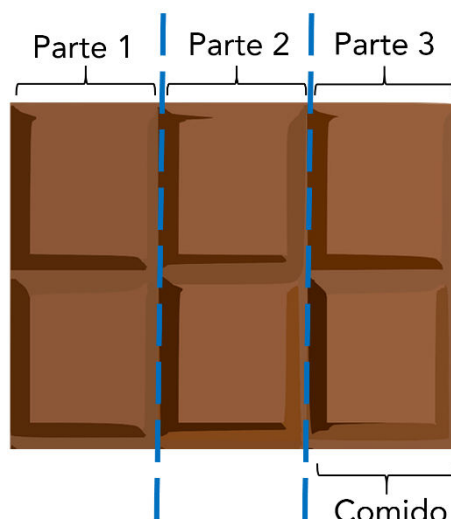
Comer $\frac{2}{6}$ (dois sextos) da barra de chocolate significa comer 2 dos 6 pedaços:



E se disséssemos que comemos $\frac{1}{3}$ (um terço) da barra de 6 pedaços, o que isso significa? Significa que, a cada três pedaços existentes na barra, comemos um pedaço. Como a nossa barra tem 6 pedaços, $\frac{1}{3}$ da nossa barra corresponde a 2 pedaços.

Uma outra forma de se pensar que foi comido $\frac{1}{3}$ da barra é dividir a barra em três e comer um desses três pedaços.





Note, portanto, que dizer que se comeu $\frac{2}{6}$ da barra é a mesma coisa do que dizer que se comeu $\frac{1}{3}$ da barra. Isso porque **as duas frações são equivalentes**:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Composição básica de uma fração

Uma fração é um número racional que representa uma divisão composta por dois termos:

- O numerador, que representa o dividendo; e
- O denominador, que representa o divisor.

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

Frações equivalentes e frações irredutíveis

Considere uma fração com um numerador inteiro ***a*** e com um denominador inteiro ***b***, representada por $\frac{a}{b}$.

Dizemos que a fração é **irredutível** quando ***a*** e ***b*** não apresentam fatores primos em comum.

Em outras palavras, uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando ***a*** e ***b*** são primos entre si.





ACORDE!

Uma fração $\frac{a}{b}$ é **irredutível** quando **a e b são primos entre si**.

Dois números são **primos entre si** quando **não apresentam fatores primos em comum**.

Exemplos:

- $\frac{14}{15}$ é uma fração **irredutível**, pois **14 e 15 não apresentam fatores primos em comum** (14 e 15 **são primos entre si**). Veja que:
 - 14 pode ser decomposto como 2×7 ;
 - 15 pode ser decomposto como 3×5 ;
 - 14 e 15 **não apresentam fatores primos em comum**, pois 14 apresenta os fatores primos 2 e 7, já 15 apresenta os fatores primos 3 e 5.
- $\frac{14}{84}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois **14 e 84 apresentam fatores primos em comum** (14 e 84 **não são primos entre si**). Veja que:
 - 14 pode ser decomposto como 2×7 ;
 - 84 pode ser decomposto como $2^2 \times 3 \times 7$;
 - 14 e 84 **apresentam fatores primos em comum: 2 e 7**.
- $\frac{2}{7}$ é uma fração **irredutível**, pois **2 e 7 não apresentam fatores primos em comum** (2 e 7 **são primos entre si**). Veja que:
 - 2 já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 2;
 - 7 já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 7;
 - 2 e 7 **não apresentam fatores primos em comum**.
- $\frac{3}{6}$ **não é** uma fração **irredutível**, pois **3 e 6 apresentam fatores primos em comum**. (3 e 6 **não são primos entre si**). Veja que:
 - 3 já é um número primo, e sua decomposição é o próprio número 3;
 - 6 pode ser decomposto como 2×3 ;
 - 3 e 6 **apresentam um fator primo em comum: 3**.

Creio que, com esses exemplos, você já entendeu o que é uma fração irredutível e o que são números primos entre si.

Para simplificar uma fração e torná-la irredutível, podemos dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro sucessivas vezes até que a divisão não seja mais possível. Exemplo:

$$\frac{84}{120} \stackrel{\div 2}{=} \frac{42}{60} \stackrel{\div 2}{=} \frac{21}{30} \stackrel{\div 3}{=} \frac{7}{10}$$



Veja que, ao obter a fração $\frac{7}{10}$, **não é mais possível dividir o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro**. Isso ocorre porque 7 e 10 **não apresentam fatores primos em comum**. Em outras palavras, 7 e 10 **são primos entre si**.

Uma outra forma de tornar uma fração irredutível é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e "simplificar" os fatores comuns. Exemplo:

$$\frac{84}{120} = \frac{\overset{2^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{3} \cdot 7}{\underset{\substack{\uparrow 2^1 \\ \downarrow 2^3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{10}$$

Veja que não necessariamente precisamos decompor em fatores primos para simplificar a fração. Podemos também transformar o numerador em produtos "convenientes" para assim realizar a simplificação.

$$\frac{84}{120} = \frac{\cancel{12} \cdot 7}{\cancel{12} \cdot 10} = \frac{7}{10}$$

Duas **frações são ditas equivalentes quando representam o mesmo número**, ou seja, quando são iguais. No exemplo anterior, $\frac{84}{120}$, $\frac{42}{60}$, $\frac{21}{30}$ e $\frac{7}{10}$ são equivalentes, pois:

$$\frac{84}{120} = \frac{42}{60} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(Pref. Sto. Augusto/2020) Ao simplificar a fração $\frac{12}{36}$ obtém-se:

- a) 1/6
- b) 1/3
- c) 1/2
- d) 1/4
- e) 1/5

Comentários:

Podemos representar o denominador da fração como 3×12

$$\frac{12}{36} = \frac{\mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}}$$

Simplificando o número **12**, obtém-se:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: Letra B.



Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, devemos transformar todas as frações em **frações equivalentes** de modo que todas elas apresentem **o mesmo denominador**.

Para que todas as frações tenham o mesmo denominador, devemos obter o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de todos os denominadores**. Exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é $\text{MMC}(3; 5; 10) = 30$. Logo, os denominadores das três frações devem ser 30. Para acharmos os numeradores, devemos determinar as frações equivalentes cujo denominador é 30.

$$\frac{2}{3} = \frac{(30 \div 3) \times 2}{30} = \frac{10 \times 2}{30} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{(30 \div 5) \times 1}{30} = \frac{6 \times 1}{30} = \frac{6}{30}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{(30 \div 10) \times 7}{30} = \frac{3 \times 7}{30} = \frac{21}{30}$$



Uma forma prática de obter essas frações equivalentes de denominador 30 é realizar o seguinte procedimento:

$$\textcircled{10} \times 2 = 20 \quad \frac{2}{3} = \frac{?}{30} = 20$$

$30 \div 3 = \textcircled{10}$

$$\textcircled{6} \times 1 = 6 \quad \frac{1}{5} = \frac{?}{30} = 6$$

$30 \div 5 = \textcircled{6}$

$$\textcircled{3} \times 7 = 21 \quad \frac{7}{10} = \frac{?}{30} = 21$$

$30 \div 10 = \textcircled{3}$

Voltando ao problema, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{10} \\ &= \frac{20}{30} + \frac{6}{30} + \frac{21}{30} \\ &= \frac{20 + 6 + 21}{30} \end{aligned}$$



$$= \frac{47}{30}$$

Para realizar uma subtração de frações, devemos realizar o mesmo procedimento. Suponha que devemos realizar a seguinte subtração:

$$\frac{44}{60} - \frac{20}{30}$$

O Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores é MMC (30; 60) = 60. Ficamos com as seguintes frações equivalentes com denominador 60:

$$\begin{aligned} & \frac{44}{60} - \frac{40}{60} \\ &= \frac{44 - 40}{60} \\ &= \frac{4}{60} \end{aligned}$$

No caso em questão, **podemos tornar a fração 4/60 irredutível**. Se dividirmos o numerador e o denominador por 4 (ou seja, se dividirmos duas vezes por 2), obtemos:

$$\frac{1}{15}$$

(PC RJ/2022) Considere a soma

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} = \frac{a}{b}$$

sendo os números naturais a e b primos entre si.

O valor da soma $a + b$ é:

- a) 35;
- b) 47;
- c) 181;
- d) 227;
- e) 269.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma das frações do lado esquerdo da equação.

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 6, 8 e 10**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:



$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$\text{Logo, } \text{MMC}(6; 8; 10) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \\ &= \frac{(120 \div 6) \times 1}{120} + \frac{(120 \div 8) \times 3}{120} + \frac{(120 \div 10) \times 7}{120} \\ &= \frac{20}{120} + \frac{45}{120} + \frac{84}{120} \\ &= \frac{20 + 45 + 84}{120} \\ &= \frac{149}{120} \end{aligned}$$

Segundo o enunciado, temos que a soma das frações, dada por $\frac{149}{120}$, é igual a $\frac{a}{b}$, sendo ***a*** e ***b*** **números naturais primos entre si**. Consequentemente:

- $\frac{a}{b}$ é uma **fração equivalente** a $\frac{149}{120}$, pois $\frac{149}{120} = \frac{a}{b}$.
- $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**, pois *a* e *b* são números naturais primos entre si.

Devemos, portanto, obter a **fração irredutível equivalente** a $\frac{149}{120}$.

Veja que:

$$\begin{aligned} 120 &= 10 \times 12 \\ &= (2 \times 5) \times (3 \times 4) \\ &= (2 \times 5) \times (3 \times 2^2) \\ &= 2^3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Logo, o número 120 apresenta os fatores primos 2, 3 e 5.

Ao tentar dividir 149 por 2, 3 e 5, percebe-se que sempre temos um resto. Isso significa que 120 e 149 **não apresentam fatores primos em comum**.

Assim, 120 e 149 são primos entre si.



Consequentemente, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ é a própria fração $\frac{149}{120}$. Logo:

$$a = 149$$

$$b = 120$$

Portanto:

$$a + b = 149 + 120$$

$$= 269$$

Gabarito: Letra E.

(MANAUSPREV/2015) Considere as expressões numéricas, abaixo.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

O valor, aproximado, da soma entre A e B é

- a) 2.
- b) 3.
- c) 1.
- d) 2,5.
- e) 1,5.

Comentários:

Primeiramente, vamos realizar a soma para A.

Note que os denominadores 2, 4, 8, 16 e 32 são potências de 2. Como **32 é múltiplo de todos os outros números**, o **MMC entre os números é 32**.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{16}{32} + \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{32} \\ &= \frac{31}{32} \end{aligned}$$



Vamos agora realizar a soma para B.

Perceba que os denominadores 3, 9, 27, 81 e 243 são potências de 3. Como **243 é múltiplo de todos os outros números**, o MMC entre os números é **243**.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} \\ &= \frac{81}{243} + \frac{27}{243} + \frac{9}{243} + \frac{3}{243} + \frac{1}{243} \\ &= \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{243} \\ &= \frac{121}{243} \end{aligned}$$

A soma entre A e B é:

$$A + B = \frac{31}{32} + \frac{121}{243}$$

Note que $\frac{31}{32}$ é aproximadamente $\frac{32}{32}$. Logo:

$$\frac{31}{32} \approx \frac{32}{32} = 1$$

Além disso, $\frac{121}{243}$ é aproximadamente $\frac{121}{242}$. Logo:

$$\frac{121}{243} \approx \frac{121}{242} = 0,5$$

Portanto, a soma de A e B é, aproximadamente:

$$\begin{aligned} A + B &\approx 1 + 0,5 \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

Multiplicação e divisão de frações

Para realizar a **multiplicação de frações**, realiza-se a multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores, obtendo-se a fração resultante:

$$\frac{3}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{3 \times 20}{4 \times 9} = \frac{60}{36}$$

Veja que, no exemplo em questão, a fração obtida não é irredutível. Uma forma mais rápida de se obter a fração irredutível é simplificar a expressão antes mesmo de realizar a multiplicação.



No exemplo a seguir:

- Os números **20** e **4** são simplificados pelo número 4, obtendo-se, respectivamente, **5** e **1**;
- Os números **3** e **9** são simplificados pelo número 3, obtendo-se, respectivamente, **1** e **3**.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{5}{3}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \div \frac{9}{20} &= \frac{3}{4} \times \frac{20}{9} \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Veja este outro exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{3}{2} \times \frac{20}{9}$$

Simplificando 3 e 9 por 3, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}$$

Simplificando 2 e 20 por 2, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} \times \frac{10}{3} \\ = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

(TRF 4/2014) O número que corresponde ao resultado da expressão numérica

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4}$$

é igual a

a) 5/9.

b) 13/36.



- c) 3.
d) 1.
e) 7/18.

Comentários:

Temos a seguinte expressão numérica:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{9}{4}$$

Veja que:

- No primeiro produto, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$, podemos simplificar 2 e 4 pelo número 2, obtendo-se $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$;
- No segundo produto, $\frac{5}{6} \times \frac{7}{10}$, podemos simplificar 5 e 10 pelo número 5, obtendo-se $\frac{1}{6} \times \frac{7}{2}$; e
- No terceiro produto, $\frac{1}{9} \times \frac{9}{4}$, podemos simplificar 9 e 9 pelo número 9, obtendo-se $\frac{1}{1} \times \frac{1}{4}$.

Ficamos com:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{1} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

O **MMC** entre os denominadores **4, 6 e 12** é **12**. Logo:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{12} + \frac{7}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{2 + 7 + 3}{12} \\ &= \frac{12}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.

A questão a seguir é relativamente complicada. Logo, não se assuste caso não consiga resolver. Inserir essa questão aqui para, aos poucos, perdermos o medo de frações.

(ALERN/2013) Sendo x e y números racionais positivos, definiremos a operação denotada por $\square$ da seguinte forma:

$$x \square y = \frac{x}{x + \frac{x}{y}}$$

Por exemplo, fazendo os cálculos verifica-se que $5 \square 1/2$, em fração irredutível, é igual a $1/3$. De acordo com essa operação que acaba de ser definida, para qualquer número racional positivo representado por x temos que $x \square 1/3$ será igual a



- a) 2/3.
- b) 1/2.
- c) 1/5.
- d) 1/4.
- e) 2/5.

Comentários:



Segundo o enunciado, a operação $x \square y$ é dada por:

$$x \square y = \frac{x}{x + \frac{x}{y}}$$

O denominador $x + \frac{x}{y}$ pode ser entendido como $\frac{x}{1} + \frac{x}{y}$.

Realizando o **MMC** entre **1** e **y**, obtém-se **y**. Ao realizar a soma das frações, ficamos com $\frac{x \cdot y + x}{y}$. Logo:

$$x \square y = \frac{x}{\frac{x \cdot y + x}{y}}$$

Veja que $x \square y$ é uma fração cujo numerador é x e o denominador é uma outra fração, dada por $\frac{x \cdot y + x}{y}$. Temos, portanto, a divisão de x por $\frac{x \cdot y + x}{y}$. Para realizar a divisão, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x \square y = x \times \frac{y}{x \cdot y + x}$$

Note que, em $x \cdot y + x$, podemos colocar o x em evidência. Ficamos com $x \times (y + 1)$. Logo:

$$x \square y = x \times \frac{y}{x \times (y + 1)}$$

A partir do resultado obtido, podemos simplificar x . Ficamos com:

$$x \square y = \frac{y}{y + 1}$$



Logo, a operação $x \square y$ independe de x e equivale a $\frac{y}{y+1}$.

Para o caso em questão, $x \square 1/3$ é dado por:

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1}$$

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$x \square 1/3 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Para realizar a **divisão** de uma fração pela outra, devemos inverter a segunda fração e realizar a multiplicação:

$$x \square 1/3 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$x \square 1/3 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: Letra D.

Comparação de frações

Para compararmos frações, ou seja, para descobrir se uma fração é maior ou menor do que outra, devemos escrevê-las sob um mesmo denominador. Isso significa que, para todas as frações que serão objeto de comparação, devemos encontrar **frações equivalentes que apresentem o mesmo denominador**.

Outra forma válida de comparar frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador, comparando-se os números decimais encontrados. Veja o exemplo a seguir:

(Pref. Salvador/2017) Considere as frações: $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{10}$, $c = \frac{7}{20}$.

A ordem crescente dessas frações é

- a) a, b, c.
- b) b, a, c.
- c) c, a, b.
- d) b, c, a.
- e) c, b, a.

Comentários:



O **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** entre os denominadores das frações ***a***, ***b***, e ***c*** é **20**. Isso porque os denominadores 5 e 10 são múltiplos do denominador 20.

As frações equivalentes com denominador 20 são:

$$a = \frac{2}{5} = \frac{8}{20} \quad b = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} \quad c = \frac{7}{20}$$

Temos, portanto, que a ordem crescente das frações é $\frac{6}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{8}{20}$. Logo, a ordem crescente das frações do enunciado é ***b***, ***c***, ***a***. O **gabarito**, portanto, é **letra D**.

Outra forma de se comparar as frações é realizar a divisão do numerador pelo denominador:

$$a = \frac{2}{5} = 0,4 \quad b = \frac{3}{10} = 0,3 \quad c = \frac{7}{20} = 0,35$$

Novamente, encontramos que a ordem crescente das frações do enunciado é ***b***, ***c***, ***a***.

Gabarito: Letra D.

Problemas envolvendo frações

O uso da palavra “de”

Uma palavra muito importante que deve ser observada quando se resolve problemas envolvendo frações é a palavra “**de**”. Isso porque essa palavra nos indica uma **multiplicação**.

Considere novamente uma barra de chocolate de 6 pedaços:



Para essa barra de chocolate, $\frac{1}{3}$ **de** 6 pedaços corresponde a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \text{ de } 6 \text{ pedaços} \\ &= \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços} \\ &= \frac{6}{3} \text{ pedaços} \end{aligned}$$



$$= 2 \text{ pedaços}$$

Agora, vamos supor que João tem direito a $\frac{1}{3}$ dessa barra **de** 6 pedaços e que, **da** parte de João, Maria comeu a metade ($\frac{1}{2}$). Quantos pedaços Maria comeu? Maria comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{3}$ **de** 6 pedaços:

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{3} \text{ de } 6 \text{ pedaços}$$

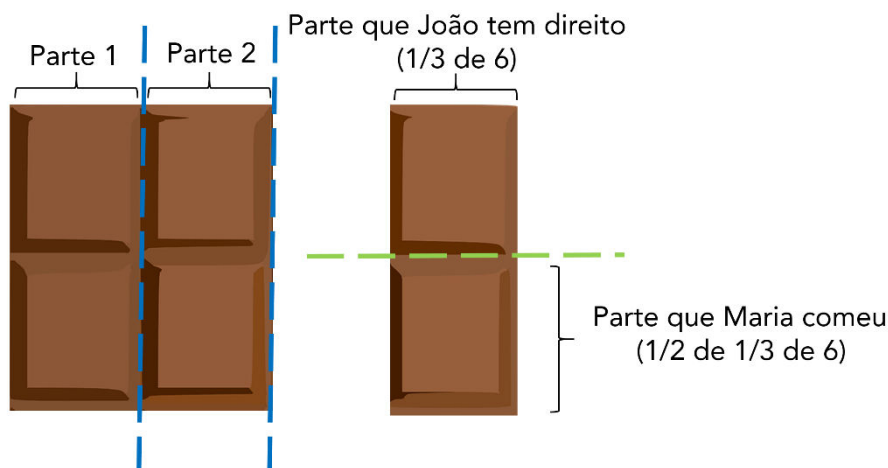
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 6 \text{ pedaços}$$

$$= \frac{1 \times 1 \times 6}{2 \times 3}$$

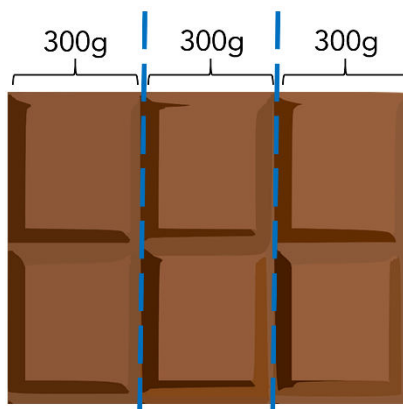
$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1 \text{ pedaço}$$

Observe a figura abaixo, que representa a parte que Maria comeu:



E se disséssemos que essa barra de chocolate tem 900 gramas, quantos gramas temos em $\frac{1}{3}$ dessa barra? Para resolver o problema, basta observar que, ao dividirmos a barra em 3 partes de 300 gramas, temos que a barra toda tem justamente $3 \times 300\text{g} = 900\text{g}$. Logo, $\frac{1}{3}$ da barra apresenta 300 gramas.



Uma outra forma de se obter o resultado é trocar o "de" pela **multiplicação**:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \text{ de } 900\text{g} \\&= \frac{1}{3} \times 900\text{g} \\&= \frac{900\text{g}}{3} \\&= 300\text{g}\end{aligned}$$

(AVAREPREV/2020) Uma empresa tem 120 funcionários, entre homens e mulheres. Se $\frac{2}{5}$ desses funcionários são mulheres, é correto afirmar que o número de mulheres é igual a

- a) 36.
- b) 48.
- c) 60.
- d) 72.

Comentários:

São mulheres $\frac{2}{5}$ de 120 funcionários.

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \text{ de } 120 \\&= \frac{2}{5} \times 120 \\&= 2 \times \frac{120}{5} \\&= 2 \times 24 \\&= 48\end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

(Pref. Angra/2019) A família de Flávio pediu uma pizza, que veio dividida em 8 fatias iguais. Flávio comeu uma fatia inteira e dividiu uma outra fatia igualmente com sua irmã.

Da pizza inteira Flávio comeu

- a) $\frac{1}{4}$.
- b) $\frac{1}{3}$.
- c) $\frac{3}{8}$.
- d) $\frac{1}{6}$.
- e) $\frac{3}{16}$.



Comentários:

Uma fatia da pizza corresponde a $\frac{1}{8}$ da pizza. Flávio comeu uma fatia mais a metade de outra fatia. Ao comer metade da outra fatia, Flávio comeu $\frac{1}{2}$ **de** $\frac{1}{8}$ da pizza.

Isso significa que Flávio comeu ao todo:

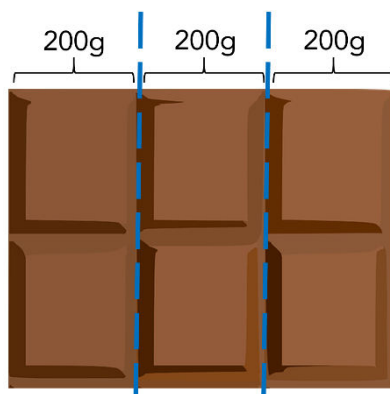
$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \text{ **de** } \frac{1}{8} \text{ da pizza} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \text{ da pizza} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ da pizza} \\ &= \frac{2}{16} + \frac{1}{16} \text{ da pizza} \\ &= \frac{2+1}{16} \text{ da pizza} \\ &= \frac{3}{16} \text{ da pizza} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

Obtenção do todo a partir da parte

Se disséssemos que $\frac{1}{3}$ de uma barra de chocolate tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? Para se responder essa pergunta, basta observar que, se uma parte de 3 tem 200g, as três partes que compõem o todo da barra têm:

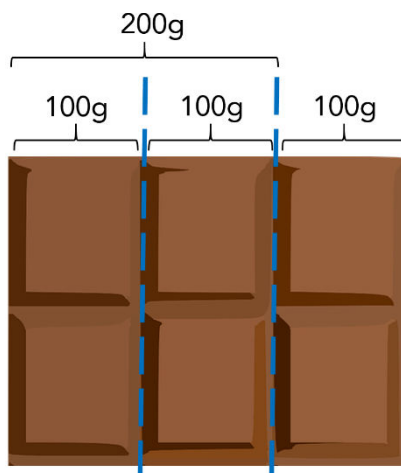
$$3 \times 200g = 600g$$



E se disséssemos que $\frac{2}{3}$ da barra tem 200g, quantos gramas tem a barra de chocolate inteira? **Ora, se 2 partes de 3 tem 200g, 1 parte de 3 tem 100g. Logo, as três partes** que compõem o todo devem ter:

$$3 \times 100g = \textbf{300g}$$





Uma forma prática de se obter o todo a partir da parte do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".

Veja que, se $\frac{2}{3}$ corresponde a 200g, podemos obter o todo invertendo a fração e multiplicando pelo valor que representa a parte (200g):

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \times 200\text{g} \\ &= 3 \times \frac{200\text{g}}{2} \\ &= 3 \times 100\text{g} \\ &= 300\text{g} \end{aligned}$$

Por que esse recurso funciona? Perceba que, ao "inverter e multiplicar" a fração $\frac{2}{3}$ que corresponde à parte, na verdade **estamos dividindo o valor de 200g por 2, obtendo o valor de uma parte de 3 (100g)**, para em seguida **multiplicar essa terça parte por 3, obtendo assim o valor do todo (300g)**.

(MPE BA/2017) Em certo reservatório, $\frac{2}{3}$ do volume de água correspondem a 120 litros.

Portanto, $\frac{3}{2}$ do volume de água desse mesmo reservatório correspondem a:

- a) 270 litros;
- b) 240 litros;
- c) 210 litros;
- d) 180 litros;
- e) 150 litros.

Comentários:



Uma **forma prática** de se obter o todo a partir da parte do problema é utilizar o recurso "**inverte e multiplica**".

Se $\frac{2}{3}$ correspondem a 120 litros, a **capacidade total** do reservatório é:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \times 120 \\&= 3 \times \frac{120}{2} \\&= 3 \times 60 \\&= 180 \text{ litros}\end{aligned}$$

Note que a questão **não nos pede a capacidade total** do reservatório, mas sim **$\frac{3}{2}$ da capacidade**.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \text{ de } 180 \text{ litros} \\&= \frac{3}{2} \times 180 \\&= 270 \text{ litros}\end{aligned}$$

Gabarito: Letra A.

Obtenção da fração complementar

Observe a seguinte barra com 8 pedaços de chocolate.



Se comermos $\frac{5}{8}$ da barra, **qual fração da barra original ainda resta?**

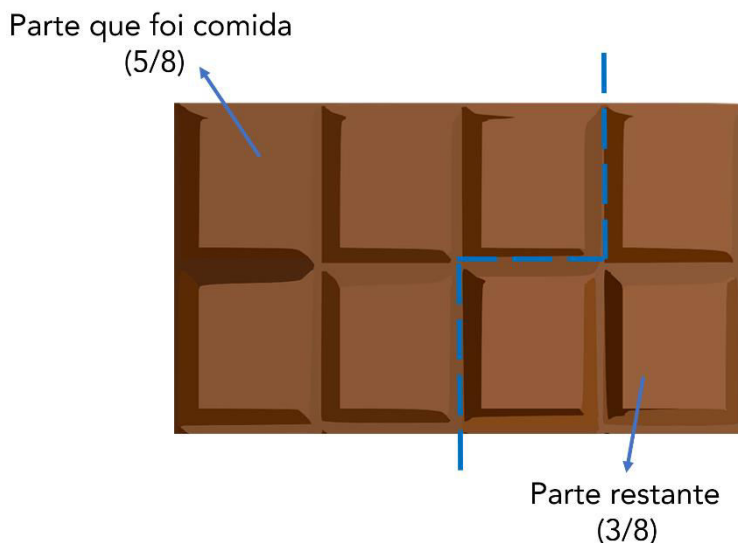
Note que a parte que **não foi comida** é dada pela **subtração de $\frac{5}{8}$ da barra inteira**. A barra inteira pode ser representada por $\frac{8}{8}$ (8 pedaços de um total de 8 pedaços) ou então pelo número inteiro 1. Logo, a parte que não foi comida é:

$$\begin{aligned}1 - \frac{5}{8} \\&= \frac{8}{8} - \frac{5}{8} \\&= \frac{8 - 5}{8}\end{aligned}$$



$$= \frac{3}{8}$$

Note que, para a barra em questão, o que restou após se comer $\frac{5}{8}$ é justamente 3 pedaços de 8 ($\frac{3}{8}$):



Podemos dizer, então, que dada uma fração $\frac{a}{b}$, a **fração complementar** corresponde a:

$$1 - \frac{a}{b} =$$

$$\frac{b}{b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

(IBGE/2019) Marlene comeu, inicialmente, um quarto da barra de chocolate que comprou. Depois, comeu um terço do que tinha sobrado.

A fração da barra de chocolate que Marlene ainda tem para comer é:

- a) $\frac{1}{2}$;
- b) $\frac{1}{3}$;
- c) $\frac{1}{4}$;
- d) $\frac{3}{4}$;
- e) $\frac{1}{12}$.

Comentários:

Inicialmente, Marlene **comeu $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate**.

O total da barra que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{4}$:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ da barra}$$



Depois, ao comer $\frac{1}{3}$ do que tinha sobrado, Marlene comeu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \text{ de } \frac{3}{4} \text{ da barra} \\ & \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \text{ da barra} \\ & = \frac{1}{4} \text{ da barra} \end{aligned}$$

O total da barra de chocolate que Marlene comeu nas duas vezes foi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{2}{4} \\ & = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como ela comeu no total $\frac{1}{2}$ da barra, a quantidade que restou corresponde à fração complementar a $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} \\ & = \frac{1}{2} \text{ da barra} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Cananéia/2020) Mauro comprou um carro. Deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada e financiou $\frac{3}{4}$ do valor restante. A quantia que falta para completar o valor total será paga em uma única parcela, após o término do financiamento. O valor dessa parcela final corresponde, do valor total do carro, a

- a) $\frac{1}{8}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) $\frac{1}{4}$
- e) $\frac{1}{3}$

Comentários:

Como Mauro deu $\frac{1}{3}$ do valor total como entrada, o valor restante após a entrada é a fração complementar a $\frac{1}{3}$.



$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} \\ = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \\ = \frac{3-1}{3} \\ = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Como Mauro **financiou** $\frac{3}{4}$ do valor restante após a entrada, ele **financiou** $\frac{3}{4}$ **de** $\frac{2}{3}$.

Isso significa que ele **não financiou** $\frac{1}{4}$ **de** $\frac{2}{3}$, pois a fração complementar de $\frac{3}{4}$ é:

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo, a quantia **não financiada** do valor restante após a entrada, que corresponde à parcela final, corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{ de } \frac{2}{3} \\ = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Simplificando 2 e 4 por 2, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

Vamos agora resolver algumas questões a mais sobre problemas envolvendo frações.



(Pref. B dos Coqueiros/2020) No início de determinado mês, uma escola tinha um estoque de 720 kg de alimentos. Nas três primeiras semanas desse mês, foram consumidos, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{24}$ e $\frac{1}{5}$ desse estoque de alimentos.

Considerando essa situação hipotética, assinale a opção que apresenta a quantidade de alimentos restante nesse estoque logo após essas três semanas.

- a) 144 kg
- b) 180 kg
- c) 210 kg
- d) 306 kg
- e) 414 kg

Comentários:

A fração que corresponde ao total de alimentos consumidos é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{5}{24} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{20}{120} + \frac{25}{120} + \frac{24}{120} \\ &= \frac{69}{120} \end{aligned}$$

A fração que corresponde ao total de alimentos **não consumidos** é dada pela **fração complementar** a $\frac{69}{120}$:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{69}{120} \\ &= \frac{120 - 69}{120} \\ &= \frac{51}{120} \end{aligned}$$

O total de alimentos não consumidos é dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{51}{120} \text{ de } 720 \text{ kg} \\ &= \frac{51}{120} \times 720 \\ &= 51 \times \frac{720}{120} \\ &= 51 \times 6 \\ &= 306 \text{ kg} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.



(TRF 4/2019) Um ciclista pedalou durante três horas. Na primeira hora percorreu $\frac{5}{18}$ do trajeto, na segunda hora percorreu $\frac{7}{25}$ do trajeto e na terceira hora percorreu $\frac{11}{45}$ do trajeto. A fração do trajeto que falta percorrer é

- a) $\frac{361}{460}$
- b) $\frac{351}{460}$
- c) $\frac{89}{450}$
- d) $\frac{99}{450}$
- e) $\frac{250}{460}$

Comentários:

O total do trajeto percorrido pelo ciclista é dado pela seguinte soma:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{25} + \frac{11}{45}$$

Para realizar a soma, devemos representar as frações por meio de **frações equivalentes** com um **mesmo denominador**. O **menor denominador comum possível** para realizar a soma é o **MMC entre 18, 25 e 45**. Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 9 \\ &= 2 \times 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 &= 5 \times 5 \\ &= 5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 &= 9 \times 5 \\ &= 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

Devemos selecionar **todos** os fatores primos obtidos com os **maiores expoentes** e realizar o produto.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$25 = 5^2$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{Logo, MMC}(18, 25, 45) = 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$$

Portanto, a soma que corresponde à fração do **trajeto percorrido** é:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{25} + \frac{11}{45}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{125}{450} + \frac{126}{450} + \frac{110}{450} \\ &= \frac{125 + 126 + 110}{450} \\ &= \frac{361}{450} \end{aligned}$$

O trajeto **não percorrido** pedido pela questão é dado pela **fração complementar** a $\frac{361}{450}$:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{361}{450} \\ &= \frac{450}{450} - \frac{361}{450} \\ &= \frac{450 - 361}{450} \\ &= \frac{89}{450} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra C.



Quando nos deparamos com problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolvê-los consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Esse recurso será utilizado com frequência na resolução dos exercícios. Vejamos:

(PC AM/2022) Geraldo resolveu se desfazer de sua coleção de miniaturas. Assim, ele deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson; das que sobraram, ele deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson e as 48 restantes ele deu para sua irmã Glória.

O número de miniaturas que Gilson recebeu foi

- a) 12.
- b) 16.
- c) 18.
- d) 24.
- e) 48.

Comentários:



Considere que o total de miniaturas de Geraldo seja M .

"...ele (Geraldo) deu $\frac{2}{5}$ das suas miniaturas para seu irmão Gerson..."

Note que o total de miniaturas que ficou com Gerson é:

$$\begin{aligned}(\text{Miniaturas Gerson}) &= \frac{2}{5} \text{ de } M \\&= \frac{2}{5} \times M \\&= \frac{2}{5} M\end{aligned}$$

"...das que sobraram, ele (Geraldo) deu $\frac{1}{3}$ para seu irmão Gilson..."

Após a distribuição para Gerson, o total de miniaturas que sobraram foi:

$$\begin{aligned}(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) \\&= M - \frac{2}{5} M \\&= \frac{5M - 2M}{5} \\&= \frac{3}{5} M\end{aligned}$$

Desse total que restou, $\frac{1}{3}$ ficou com o Gilson. Logo, o número de miniaturas que ficaram com Gilson foi:

$$\begin{aligned}(\text{Miniaturas Gilson}) &= \frac{1}{3} \text{ de } \frac{3}{5} M \\&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} M \\&= \frac{1}{5} M\end{aligned}$$

"...e as 48 restantes ele (Geraldo) deu para sua irmã Glória..."

O número de miniaturas que restou para Glória foi:

$$\begin{aligned}(\text{Total}) - (\text{Miniaturas Gerson}) - (\text{Miniaturas Gilson}) \\&= M - \frac{2}{5} M - \frac{1}{5} M \\&= \frac{5M - 2M - 1M}{5} \\&= \frac{2}{5} M\end{aligned}$$



Esse número de miniaturas corresponde a 48. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}M &= 48 \\ M &= \frac{48 \times 5}{2} \\ M &= 120\end{aligned}$$

Portanto, **o total de miniaturas é 120**. Queremos obter o número de miniaturas que ficaram com Gilson:

$$\begin{aligned}(\text{Miniaturas Gilson}) &= \frac{1}{5}M \\ &= \frac{1}{5} \times 120 \\ &= 24\end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.

(SSP AM/2022) Os alunos de uma turma estavam se preparando para um concurso. Constatou-se que: a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC, a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM, e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol.

O número de alunos dessa turma que torcem pelo Manaus FC é

- a) 21.
- b) 25.
- c) 26.
- d) 28.
- e) 35.

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma seja A.

"...a terça parte do total de alunos torce pelo Manaus FC..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Manaus FC é:

$$\begin{aligned}(\text{Manaus FC}) &= \frac{1}{3} \text{ de } A \\ &= \frac{1}{3} \times A \\ &= \frac{1}{3}A\end{aligned}$$



"...a quarta parte do total de alunos torce pelo Nacional-AM..."

Logo, o total de alunos que torce pelo Nacional-AM é:

$$\begin{aligned}(\text{Nacional-AM}) &= \frac{1}{4} \text{ de } A \\&= \frac{1}{4} \times A \\&= \frac{1}{4} A\end{aligned}$$

"...e os 35 alunos restantes torcem por outros clubes ou não são ligados em futebol."

O número de alunos restantes é:

$$\begin{aligned}(\text{Total de alunos}) - (\text{Manaus FC}) - (\text{Nacional-AM}) \\&= A - \frac{1}{3}A - \frac{1}{4}A \\&= \frac{12A - 4A - 3A}{12} \\&= \frac{5A}{12}\end{aligned}$$

Esse número de alunos corresponde a 35. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{5A}{12} &= 35 \\A &= 35 \times \frac{12}{5} \\A &= 84\end{aligned}$$

Portanto, o total de alunos é 84. Queremos obter o número de alunos que torcem pelo Manaus FC:

$$\begin{aligned}(\text{Manaus FC}) &= \frac{1}{3} A \\&= \frac{1}{3} \times 84 \\&= 28\end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.



Dízima periódica

Definição e representação

Uma dízima periódica ocorre quando, ao realizar uma divisão, obtém-se um número com casas decimais que se repetem indefinidamente.

Exemplo: Ao realizar a divisão de 23 por 99, obtém-se o número "0,23232323...". Note que a porção "23" se repete indefinidamente. Nesse caso, dizemos que 23 é o período da dízima periódica "0,23232323...". Isso significa que **o período é a porção que se repete na dízima periódica**.

Podemos **representar uma dízima periódica com um traço sobre o período**. Isto é:

$$0,23232323 \dots = 0,\overline{23}$$

A dízima periódica "5,77898989..." apresenta o período "89", pois esta é a porção que se repete indefinidamente. Podemos representar essa dízima periódica da seguinte forma:

$$5,77898989 \dots = 5,77\overline{89}$$

Transformação da dízima periódica em fração

Os principais problemas relacionados às dízimas periódicas consistem em transformar o número em uma fração. Para realizar essa transformação, a única coisa que você precisa se lembrar é que:

- Um número na forma $0,AAA \dots = 0,\overline{A}$ corresponde a $\frac{A}{9}$;
- Um número na forma $0,ABABAB \dots = 0,\overline{AB}$ corresponde a $\frac{AB}{99}$;
- Um número na forma $0,ABCABCABC \dots = 0,\overline{ABC}$ corresponde a $\frac{ABC}{999}$;
- E assim sucessivamente.



$$0,\overline{ABC} \text{ corresponde a } \frac{ABC}{999}$$

Vamos a alguns exemplos.



Transforme 0,3333.... em uma fração

$$0,3333 \dots = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}$$

Transforme 0,45454545... em uma fração

$$0,4545 \dots = 0,\overline{45} = \frac{45}{99}$$

Transforme 0,672346723467234... em uma fração

$$0,672346723467234 \dots = 0,\overline{67234} = \frac{67234}{99999}$$

Para dízimas periódicas que fogem desse padrão, devemos modificá-las de modo a deixá-las no formato que conhecemos. Vejamos:

Transforme 0,553333... em uma fração

Veja que o período da dízima periódica é 3. Vamos separar 0,55 do restante do número:

$$0,55\overline{3} = 0,55 + 0,00\overline{3}$$

Note que ainda não podemos transformar a parte que apresenta o período em uma fração. Devemos escrevê-la de uma outra forma:

$$= 0,55 + \frac{1}{100} \times 0,3$$

Agora sim temos $0,\overline{3}$. Esse número corresponde a $\frac{3}{9}$.

$$\begin{aligned} &= 0,55 + \frac{1}{100} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{55}{100} + \frac{3}{900} \\ &= \frac{9 \times 55 + 3}{900} \\ &= \frac{498}{900} \end{aligned}$$

Transforme 6,453121212... em uma fração

Devemos realizar o mesmo procedimento, separando a parte que não se repete do período da dízima periódica.

$$\begin{aligned} 6,453\overline{12} \dots &= 6,453 + 0,000\overline{12} \\ &= 6,453 + \frac{1}{1000} \times 0,1\overline{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 6,453 + \frac{1}{1000} \times \frac{12}{99} \\ &= \frac{6453}{1000} + \frac{12}{99000} \\ &= \frac{99 \times 6453 + 12}{99000} \\ &= \frac{638859}{99000} \end{aligned}$$



Uma recorrência interessante sobre a dízima periódica é que $0,999\dots$ é igual a 1. Não se trata de uma aproximação. Os números são exatamente iguais.

$$0,999\dots = 0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Vamos resolver algumas questões.

(DPE RS /2017) Sabendo que o número decimal F é $0,8\bar{6}66\dots$, que o número decimal G é $0,7\bar{1}11\dots$ e que o número decimal H é $0,4\bar{2}22\dots$, então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

- a) $6,111\dots$
- b) $5,888\dots$
- c) 6
- d) 3
- e) 5,98

Comentários:

A soma de F, G e H é dada por:

$$0,8\bar{6} + 0,7\bar{1} + 0,4\bar{2}$$

Separando as partes que não se repetem dos períodos, temos:

$$\begin{aligned} &= (0,8 + 0,7 + 0,4) + 0,0\bar{6} + 0,0\bar{1} + 0,0\bar{2} \\ &= 1,9 + \frac{1}{10}0,\bar{6} + \frac{1}{10}0,\bar{1} + \frac{1}{10}0,\bar{2} \\ &= 1,9 + \frac{1}{10} \times (0,\bar{6} + 0,\bar{1} + 0,\bar{2}) \\ &= 1,9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) \\ &= 1,9 + \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{9}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 1,9 + 0,1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

A questão pede o triplo da soma de F, G e H, que é dado por $3 \times 2 = 6$.

Gabarito: Letra C.

(MIN/2013) Julgue o seguinte item, relativo a sistemas numéricos e sistema legal de medidas.

Se $A = 1,232323\dots$ e $B = 0,434343\dots$, então $A + B = 165/99$.

Comentários:

Observe que A apresenta o período 23.

$$\begin{aligned} A &= 1,\overline{23} \\ &= 1 + \frac{23}{99} \\ &= \frac{99 + 23}{99} = \frac{122}{99} \end{aligned}$$

B apresenta o período 43.

$$\begin{aligned} B &= 0,\overline{43} \\ &= \frac{43}{99} \end{aligned}$$

Ao somar A e B, temos:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{122}{99} + \frac{43}{99} \\ &= \frac{165}{99} \end{aligned}$$

Gabarito: CERTO.



RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão e proporção

Razão

A **razão** entre os números A e B é a divisão de A por B.

- Razão entre A e B;
- Razão de A para B;
- A está para B;
- A:B;
- A/B;
- $\frac{A}{B}$.

Proporção

Proporção é a igualdade entre duas **ou mais razões**.

Sejam as **razões** $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$. A **proporção** é dada pela igualdade: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

- A e D são os **extremos**; e
- B e C são os **meios**

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Outra forma de entender a “**multiplicação cruzada**” é perceber que **podemos rearranjar os meios e os extremos**.

Não confundir a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema.

Propriedade fundamental da soma

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d}$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então é verdade que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$



Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Podemos somar e subtrair os numeradores e os denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c+e+g}{-b+d+f+h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a+c-e+g}{-b+d-f+h}$$

São diversas as possibilidades. **Não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c+e-g}{-d+f-h}$$

Escala

A **escala** é um **tipo específico de razão**. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

Velocidade Média e Vazão

Velocidade Média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Para **converter km/h para m/s**, devemos **dividir o valor por 3,6**
Para **converter m/s para km/h**, devemos **multiplicar o valor por 3,6**

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.



Dois conceitos importantes derivados das frações são a **razão** e a **proporção**. Vamos compreendê-los.

Razão

Sejam dois números **A** e **B**, com **B** diferente de zero. A **razão entre os números A e B é a divisão de A por B**, podendo ser expressa por:

- Razão entre **A** e **B**;
- Razão de **A** para **B**;
- **A** está para **B**;
- **A:B**;
- **A/B**;
- $\frac{A}{B}$.

O conceito de razão nos permite fazer a comparação entre dois números. Se, por exemplo, tivermos em uma sala 10 adultos e 5 crianças, a razão entre o **número de adultos** e o **número de crianças** é:

$$\frac{\text{Número de adultos}}{\text{Número de crianças}} = \frac{10}{5} = 2$$

Note, portanto, que a razão entre o número de adultos e o número de crianças representa quantas vezes o número de adultos é maior do que o número de crianças. Para o exemplo em questão, representa quantas vezes o número 10 é maior do que o 5: duas vezes.

Se quisermos a razão entre o **número de crianças** e o **número de adultos**, temos:

$$\frac{\text{Número de crianças}}{\text{Número de adultos}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Vamos exercitar esse conceito.

(SEFAZ-BA/2019) Durante a campanha para eleições presidenciais em determinado país foram compartilhadas 30 milhões de vezes fakenews a favor do candidato A. Já fakenews a favor do candidato B foram compartilhadas 6 milhões de vezes. De acordo com esses dados, pode-se estimar que a razão entre a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B é igual a

- a) 4.
- b) 3.
- c) 2.
- d) 5.
- e) 6.

Comentários:

O número de compartilhamentos de fakenews pró-A é $N_A = 30$ milhões.

O número de compartilhamentos de fakenews pró-B é $N_B = 6$ milhões.



A diferença **D** entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B é dada por:

$$D = N_a - N_b = 24 \text{ milhões}$$

A questão pede **razão entre** a diferença entre o número de compartilhamentos de fakenews pró-A e pró-B em relação ao número de compartilhamentos de fakenews pró-B.

Trata-se da **razão entre D e N_b**:

$$\frac{D}{N_b} = \frac{24 \text{ milhões}}{6 \text{ milhões}} = \frac{24}{6} = 4$$

Gabarito: Letra A.

(CREF 12/2013) Se a razão A/B vale 3, sendo B diferente de 0, então a razão de $(2A-B)/2A$ vale:

- a) 1
- b) $1/2$
- c) $4/5$
- d) $3/5$
- e) $5/6$

Comentários:

Podemos escrever A em função de B.

$$\frac{A}{B} = 3$$

$$A = 3B$$

Substituindo **A = 3B** na razão **$(2A-B)/2A$** , temos:

$$\begin{aligned} & \frac{2A - B}{2A} \\ &= \frac{2 \times 3B - B}{2 \times 3B} \\ &= \frac{6B - B}{6B} \\ &= \frac{5B}{6B} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

O **gabarito**, portanto, é **Letra E**.

Outra forma de se resolver a questão é "fazer aparecer" a razão **A/B** na razão **$(2A-B)/2A$** .

$$\begin{aligned} & \frac{2A - B}{2A} \\ &= \frac{2A}{2A} - \frac{B}{2A} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{B}{A} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{A}{B}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &\frac{6-1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

Assim como ocorre em problemas envolvendo frações, um recurso importante para resolver exercícios envolvendo o conceito de razão consiste em **modelar o problema atribuindo uma incógnita a determinado valor que se desconhece**. Vejamos:

(CBM AM/2022) Em um grupo de pessoas, o número de homens é igual ao número de mulheres. Seleccionam-se então $\frac{2}{5}$ dos homens $\frac{3}{4}$ das mulheres e forma-se um novo grupo.

Nesse novo grupo, em relação ao total de pessoas, as mulheres representam

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{5}{9}$
- c) $\frac{7}{20}$
- d) $\frac{15}{23}$
- e) $\frac{17}{25}$

Comentários:

Considere que originalmente o número de **homens** e o número de **mulheres** seja **igual a X**, **totalizando 2X pessoas**.

No novo grupo, temos $\frac{2}{5}$ dos homens. O total de homens nesse novo grupo é:

$$\text{Homens}_{\text{novo grupo}} = \frac{2}{5} \text{ de } X = \frac{2}{5} \times X = \frac{2}{5}X$$

Ainda no novo grupo, temos $\frac{3}{4}$ das mulheres. O total de mulheres nesse novo grupo é:

$$\text{Mulheres}_{\text{novo grupo}} = \frac{3}{4} \text{ de } X = \frac{3}{4} \times X = \frac{3}{4}X$$



Nesse novo grupo, a razão entre o número de mulheres e o total de pessoas é:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Mulheres}_{\text{novo grupo}}}{\text{Homens}_{\text{novo grupo}} + \text{Mulheres}_{\text{novo grupo}}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{2}{5}X + \frac{3}{4}X} \\ &= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{8X + 15X}{20}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}X}{\frac{23}{20}X} \end{aligned}$$

Simplificando X , temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{20}} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{20}{23} \\ &= \frac{15}{23} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra D.



Proporção

Conceito de proporção

Proporção é a igualdade entre duas ou mais razões.

Sejam as razões A/B e C/D . A proporção é dada pela igualdade:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Podemos representar uma proporção das seguintes formas:

- A está para B assim como C está para D ;
- $A:B::C:D$;
- $A/B = C/D$;
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Ainda em uma proporção $A/B = C/D$, diz-se que:

- A e D são os **extremos**; e
- B e C são os **meios**.

Multiplicação cruzada

A propriedade das proporções conhecida por “**multiplicação cruzada**” nos diz o seguinte:

Em uma proporção, o **produto dos meios** é igual ao **produto dos extremos**.

Em outras palavras, dada a proporção $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, temos que $C \times B = A \times D$.

Considere, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{10} = \frac{20}{40}$$

Note que o produto dos meios, 10×20 , é igual ao produto dos extremos, 5×40 , pois ambas as multiplicações nos retornam o resultado 200.

Vamos a um exemplo.



Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$.

Realizando a “multiplicação cruzada”, obtemos:

$$4 \times 9(x+1) = 3(x-2) \times 20$$

$$36 \times (x+1) = 60 \times (x-2)$$

$$36x + 36 = 60x - 120$$

$$120 + 36 = 60x - 36x$$

$$156 = 24x$$

$$24x = 156$$

$$x = \frac{156}{24}$$

$$x = 6,5$$

Outra forma de entender a “multiplicação cruzada” é perceber que podemos rearranjar os **meios** e os **extremos**. Para exemplificar esse conceito, considere a mesma proporção:

$$\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$$

Os meios da proporção considerada são **4** e **9(x+1)**.

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{9(x+1)}}{20}$$

Podemos rearranjar os meios da proporção original da seguinte forma:

$$\frac{3(x-2)}{1} = \frac{\mathbf{4 \times 9(x+1)}}{20}$$

Também podemos rearranjar os meios da proporção original assim:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{4 \times 9(x+1)}} = \frac{1}{20}$$

Outra possibilidade é trocar os meios de posição:

$$\frac{3(x-2)}{\mathbf{9(x+1)}} = \frac{\mathbf{4}}{20}$$

A mesma ideia vale para os extremos da proporção.



Os extremos da proporção considerada são $3(x - 2)$ e 20 .

$$\frac{3(x - 2)}{4} = \frac{9(x + 1)}{20}$$

Podemos rearranjar os extremos das seguintes formas:

$$\frac{3(x - 2) \times 20}{4} = \frac{9(x + 1)}{1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{9(x + 1)}{3(x - 2) \times 20}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{9(x + 1)}{3(x - 2)}$$

Entendida essa nova percepção da “**multiplicação cruzada**”, vamos determinar o valor da incógnita x de outra maneira.

Determine o valor de incógnita x na proporção $\frac{3(x-2)}{4} = \frac{9(x+1)}{20}$.

$$\frac{3(x - 2)}{4} = \frac{9(x + 1)}{20}$$

$$\frac{3(x - 2)}{1} = \frac{4 \times 9(x + 1)}{20}$$

$$\frac{(x - 2)}{1} = \frac{4 \times 9(x + 1)}{3 \times 20}$$

$$(x - 2) = \frac{4 \times 9}{3 \times 20} \times (x + 1)$$

Simplificando 4 com 20 e 9 com 3, obtemos:

$$(x - 2) = \frac{3}{5} \times (x + 1)$$

$$x - 2 = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$



$$x - \frac{3}{5}x = 2 + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x = \frac{13}{5}$$

$$2x = 13$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$$x = 6,5$$

Vamos praticar o que aprendemos sobre “**multiplicação cruzada**”.

(Pref. P das Missões/2019) O valor de “x” na proporção $\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$ é:

- a) 2.
- b) 5.
- c) 7.
- d) 9.
- e) 10.

Comentários:

Sabemos que:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+7}{4}$$

Para determinar o valor de "x", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$x \times 4 = 2 \times (x + 7)$$

$$4x = 2x + 14$$

$$4x - 2x = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = \frac{14}{2}$$

$$x = 7$$

Gabarito: Letra C.



(CODESG/2019) Considere que os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam, nessa ordem, uma proporção. Qual o valor de k?

- a) 0,8
- b) 1,8
- c) 2,4
- d) 2,6

Comentários:

Como os números 0,6; 1,6; 0,3; e k formam uma proporção na ordem indicada, então:

$$\frac{0,6}{1,6} = \frac{0,3}{k}$$

Para determinar o valor de "k", devemos utilizar a "multiplicação cruzada".

$$0,6 \times k = 1,6 \times 0,3$$

$$0,6k = 0,48$$

$$k = \frac{0,48}{0,6}$$

$$k = 0,8$$

Gabarito: Letra A.

(Pref. Peruíbe/2019) Em um experimento químico, a razão entre uma quantidade do produto A para $\frac{2}{3}$ da quantidade do produto B é igual a $\frac{1}{3}$. Para obter esse resultado é(são) necessário(s), do produto A,

- a) $\frac{1}{6}$ da quantidade do produto B.
- b) $\frac{2}{9}$ da quantidade do produto B.
- c) $\frac{1}{3}$ da quantidade do produto B.
- d) $\frac{2}{5}$ da quantidade do produto B.
- e) $\frac{1}{2}$ da quantidade do produto B.

Comentários:

Seja Q_A a quantidade do produto A e Q_B a quantidade do produto B.

A razão entre Q_A e $\frac{2}{3} Q_B$ é igual a $\frac{1}{3}$. Logo:

$$\frac{Q_A}{\left(\frac{2}{3} Q_B\right)} = \frac{1}{3}$$

Rearranjando os meios, temos:

$$\frac{Q_A}{1} = \frac{\left(\frac{2}{3} Q_B\right)}{3}$$
$$Q_A = \frac{2Q_B}{3} \times \frac{1}{3}$$



$$Q_A = \frac{2}{9} Q_B$$

Logo, são necessários do produto A $\frac{2}{9}$ da quantidade do produto B.

Gabarito: Letra B.

Um ponto muito importante na resolução de problemas é **não confundir** a razão entre duas entidades com a razão entre uma entidade e a totalidade de casos do problema. Vejamos o exemplo a seguir:

(Pref. Perúbe/2019) No ano de 2015, uma pesquisa revelou que, no Brasil, a razão entre o número de pessoas que apresentam algum tipo de deficiência e o número de pessoas que não apresentam deficiência é de $\frac{1}{3}$. Com base nessa informação, é correto afirmar que, no Brasil, a cada

- a) seis pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.
- b) cinco pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.
- c) quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.
- d) três pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.
- e) duas pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Comentários:

Perceba que o problema pergunta sobre a razão entre as pessoas com deficiência (C) e a **totalidade da população** brasileira (T).

A razão apresentada pelo enunciado é entre as pessoas com deficiência (C) e as pessoas sem deficiência (S):

$$\frac{C}{S} = \frac{1}{3}$$

Ao realizar a "multiplicação cruzada", obtemos que o número de pessoas sem deficiência é o triplo do número de pessoas com deficiência:

$$1S = 3C$$

O total de pessoas no Brasil (T) corresponde à soma das pessoas com e sem deficiência:

$$T = C + S$$

A razão entre o número de pessoas com deficiência e a totalidade da população é:

$$\frac{C}{T} = \frac{C}{C + S}$$

Como $S = 3C$, temos:

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{C + 3C} \\ &= \frac{C}{4C} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Logo, no Brasil, a cada quatro pessoas, uma tem algum tipo de deficiência.

Gabarito: Letra C.

Propriedades fundamentais das proporções

As propriedades a seguir serão de grande valia para problemas de proporcionalidade, especialmente a propriedade fundamental da soma.

Propriedade fundamental soma

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são válidas também as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

O mesmo vale para uma proporção composta por **mais de duas razões**:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$$

Vale ressaltar que **não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção**, sendo também verdade, por exemplo, casos como os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c}{b+d} \\ \text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a+c+g}{b+d+h} \end{aligned}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção com três razões $\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20}$. Determine a , b e c , sabendo que $a + b + c = 140$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} &= \frac{a+b+c}{5+10+20} \\ \frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} &= \frac{140}{35} \\ \frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{20} &= 4 \end{aligned}$$



A sequência de igualdades acima significa que:

$$\frac{a}{5} = 4 \rightarrow a = 20$$

$$\frac{b}{10} = 4 \rightarrow b = 40$$

$$\frac{c}{20} = 4 \rightarrow c = 80$$

Propriedade fundamental da subtração

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, são válidas as proporções $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$ e também $\frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$. Em resumo, temos que:

$$\text{Considerando que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então é verdade que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Vamos a um exemplo que mostra a utilidade dessa propriedade.

Considere a proporção $\frac{x+1}{10} = \frac{x-4}{5}$. Determine a incógnita "x".

Ao subtrair os numeradores, podemos eliminar a incógnita "x". Observe:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{10} &= \frac{x-4}{5} = \frac{(x+1) - (x-4)}{10-5} \\ \frac{x+1}{10} &= \frac{x-4}{5} = \frac{5}{5} \\ \frac{x+1}{10} &= \frac{x-4}{5} = 1\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade $\frac{x+1}{10} = 1$, obtemos:

$$x+1 = 10$$

$$x = 9$$

Poderíamos também utilizar a igualdade $\frac{x-4}{5} = 1$:

$$x-4 = 5$$

$$x = 9$$



Uso conjunto das propriedades da soma e da subtração

Em uma mesma proporção composta por duas ou mais razões, podemos utilizar as duas propriedades anteriores em conjunto. Por exemplo, se tivermos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Podemos somar e subtrair os numeradores e denominadores seguindo a mesma lógica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-a + c + e + g}{-b + d + f + h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a - c + e - g}{b - d + f - h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e - g}{b + d - f - h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e + g}{b + d - f + h}$$

Enfim, são diversas as possibilidades. O importante é não esquecer que, ao realizar uma operação (soma ou subtração) com o numerador de uma das razões, devemos realizar a mesma operação (soma ou subtração) com o denominador dessa razão.

Vale ressaltar que não é estritamente necessário utilizar todas as razões apresentadas na proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{a + c - e}{b + d - f}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{-c + e - g}{-d + f - h}$$



Escala

A escala é um tipo específico de razão. Trata-se da razão entre uma medida representada em um desenho e a medida real do objeto que se representa.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

É muito comum que a escala seja representada na forma **A:B**.

Quando temos, por exemplo, um mapa na escala 1:50.000, significa que cada unidade de comprimento do mapa corresponde a 50.000 unidades de comprimento do mundo real, seja qual for essa unidade de comprimento:

- Se estivermos falando de metros, cada metro do mapa corresponde a 50.000 metros no mundo real;
- Se estivermos falando de centímetros, cada centímetro do mapa corresponde a 50.000 centímetros no mundo real;
- Se estivermos falando de milímetros, cada milímetro do mapa corresponde a 50.000 milímetros no mundo real;
- Etc.

(ANAC/2009) Acerca de grandezas proporcionais e de matemática financeira, julgue o item que segue.

Se a maquete de um helicóptero, construída na escala de 1:24, tiver o comprimento igual a 20 cm, então o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Comentários:

A escala 1:24 apresenta 20cm como medida representada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{20 \text{ cm}}{\text{Medida real}}$$

$$1 \times (\text{Medida real}) = 24 \times 20 \text{ cm}$$

$$(\text{Medida real}) = 480 \text{ cm}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2} . O valor da medida real, em metros, é:

$$(\text{Medida real}) = 480 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$(\text{Medida real}) = 4,8 \text{ m}$$

Logo, o comprimento real dessa aeronave será inferior a 5 m.

Gabarito: CERTO.



(Pref. Olímpia/2019) A tabela a seguir apresenta algumas escalas e medidas:

Escala	Medida na representação gráfica	Medida real
1:1 000	6 cm	60 m
1:2 500	20 cm	X
1:4 000	Y	600 m

As medidas X e Y são, respectivamente, iguais a

- a) 25 m e 15 cm.
- b) 60 m e 80 cm.
- c) 500 m e 12 cm.
- d) 500 m e 15 cm.
- e) 800 m e 60 cm.

Comentários:

A escala 1:2.500 apresenta 20cm como medida representada e X como medida real.

$$\begin{aligned}\text{Escala} &= \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}} \\ \frac{1}{2.500} &= \frac{20\text{cm}}{X} \\ 1 \times X &= 20\text{cm} \times 2.500 \\ X &= 50.000 \text{ cm}\end{aligned}$$

Lembre-se que o prefixo "**centi**" (**c**) corresponde a 10^{-2} . O valor de X, em metros, é:

$$\begin{aligned}X &= 50.000 \times 10^{-2}\text{m} \\ X &= 500\text{m}\end{aligned}$$

A escala 1:4.000 apresenta Y como medida representada e 600m como medida real.

$$\begin{aligned}\text{Escala} &= \frac{\text{Medida representada}}{\text{Medida real}} \\ \frac{1}{4.000} &= \frac{Y}{600\text{m}} \\ \frac{600\text{m}}{4.000} &= Y \\ Y &= 0,15 \text{ m}\end{aligned}$$

0,15m correspondem a 15cm. Logo, Y = 15cm.

Gabarito: Letra D.



Velocidade média e vazão

Nesse tópico, vamos tratar de problemas envolvendo **velocidade média** e **vazão**, que também são tipos específicos de razão.

Velocidade média

A **velocidade média** corresponde à razão entre uma distância percorrida e o tempo em que se percorreu essa distância:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Se a distância percorrida é dada em **quilômetros (km)** e o tempo em que se percorreu a distância é dado em **horas (h)**, a velocidade média é obtida na unidade **quilômetros por hora (km/h)**. Por exemplo, caso um automóvel tenha percorrido 144 km em 2h, a velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{144 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 72 \text{ km/h}$$

Se a distância for dada em **metros (m)** e o tempo for dado em **segundos (s)**, a velocidade média é obtida na unidade **metros por segundo (m/s)**. Por exemplo, se um atleta correu 200 metros em 25 segundos, a sua velocidade média é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{200 \text{ m}}{25 \text{ s}} = 8 \text{ m/s}$$

Uma vez que **quilômetros por hora (km/h)** e **metros por segundo (m/s)** são unidades de velocidade, podemos realizar uma conversão entre essas unidades. Sabemos que:

- **1km** corresponde a **1000m**; e
- Em **1h** temos **60min**, que correspondem a $60 \times 60 = 3600\text{s}$.

Com base nisso, observe que, **para converter quilômetros por hora (km/h) para metros por segundo (m/s)**, **devemos dividir o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **72 km/h**:

$$72 \text{ km/h} = \frac{72 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{72 \times 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{72 \text{ m}}{\frac{3600}{1000} \text{ s}} = \frac{72 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$



Além disso, note que:

- Como **1km** corresponde a **1000m**, temos que **1m** corresponde a $\frac{1}{1000}$ km; e
- Como **1h** temos **3600s**, temos que **1s** corresponde a $\frac{1}{3600}$ h.

Com base nisso, podemos observar que, para **converter metros por segundo (m/s) para quilômetros por hora (km/h)**, **devemos multiplicar o valor por 3,6**. Acompanhe o raciocínio aplicado para a velocidade de **20 m/s**:

$$20 \text{ m/s} = \frac{20 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{20 \times \frac{1}{1000} \text{ km}}{1 \times \frac{1}{3600} \text{ h}} = 20 \times \frac{1}{1000} \times 3600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \times 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \text{ km/h}$$



Para **converter km/h para m/s**, **devemos dividir o valor por 3,6**

Para **converter m/s para km/h**, **devemos multiplicar o valor por 3,6**

Cumpra destacar que **tudo que vimos aqui para velocidade média vale para problemas em que temos uma velocidade constante**. Isso porque, **quando a velocidade é constante durante um trajeto, esta é a velocidade média**.

Nesse momento, vamos resolver alguns problemas envolvendo essa razão especial que chamamos de **velocidade média**.



(PREVISCAM/2022) Um motorista de táxi fez um percurso de 50 km em 30 minutos com velocidade constante. Qual a velocidade, em quilômetros por hora?

- a) 105 km/h.
- b) 100 km/h.
- c) 150 km/h.
- d) 120 km/h.

Comentários:

Para obter a velocidade em **quilômetros por hora (km/h)**, devemos ter a distância percorrida em **quilômetros (km)** e o tempo em **horas (h)**.



Como **1h = 60min**, 30 minutos correspondem à metade de uma hora, ou seja, **30min = 0,5h**. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$\text{Velocidade Média} = \frac{50 \text{ km}}{0,5 \text{ h}}$$

$$\text{Velocidade Média} = 100 \text{ km/h}$$

Como a velocidade procurada é uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Gabarito: Letra B.

(CBM RJ/2022) Em certa pista, um carro de corrida, mantendo velocidade média de 100 km/h durante 2 horas deu exatamente 45 voltas.

Na mesma pista, aumentando a velocidade média para 180 km/h, o número de voltas que serão dadas nas mesmas 2 horas é

- a) 25.
- b) 30.
- c) 36.
- d) 72.
- e) 81.

Comentários:

Suponha que em **uma volta** temos uma **distância x em quilômetros**. Note que, na primeira situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **100 km/h** durante **2h** e percorreu a distância de **45x**. Logo:

$$\text{Velocidade Média}_1 = \frac{\text{Distância percorrida}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$100 \text{ km/h} = \frac{45x}{2 \text{ h}}$$

Realizando a “multiplicação cruzada”, temos:

$$45x = 2h \times 100 \text{ km/h}$$

$$45x = 200 \text{ km}$$

$$x = \frac{200}{45} \text{ km}$$



Simplificando o numerador e o denominador por 5, temos:

$$x = \frac{40}{9} \text{ km}$$

Portanto, **uma volta** corresponde à distância de **40/9 km**.

Na segunda situação, o carro de corrida manteve a velocidade média de **180 km/h** durante **2h**. Com isso, podemos obter a **distância D** percorrida nessa segunda situação:

$$\text{Velocidade Média}_2 = \frac{\text{Distância percorrida}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$180 \text{ km/h} = \frac{D}{2 \text{ h}}$$

Realizando a “multiplicação cruzada”, temos:

$$D = 2 \text{ h} \times 180 \text{ km/h}$$

$$D = 360 \text{ km}$$

Precisamos saber quantas voltas correspondem à distância de **360 km**. Trata-se da seguinte divisão:

$$\begin{aligned} & \frac{360 \text{ km}}{\frac{40}{9} \text{ km por volta}} \\ &= 360 \times \frac{9}{40} \\ &= \frac{360}{40} \times 9 \\ &= 9 \times 9 \\ &= 81 \text{ voltas} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.



A seguir, apresentarei duas questões de maior complexidade. **Não se preocupe se você errar, especialmente caso você nunca tenha visto esse tipo de questão na sua vida.** Isso porque esse tipo de questão **não é comum de aparecer em provas** e, além disso, essas questões **fogem um pouco do escopo de Matemática e de Raciocínio Lógico**, começando a entrar no campo da Física.



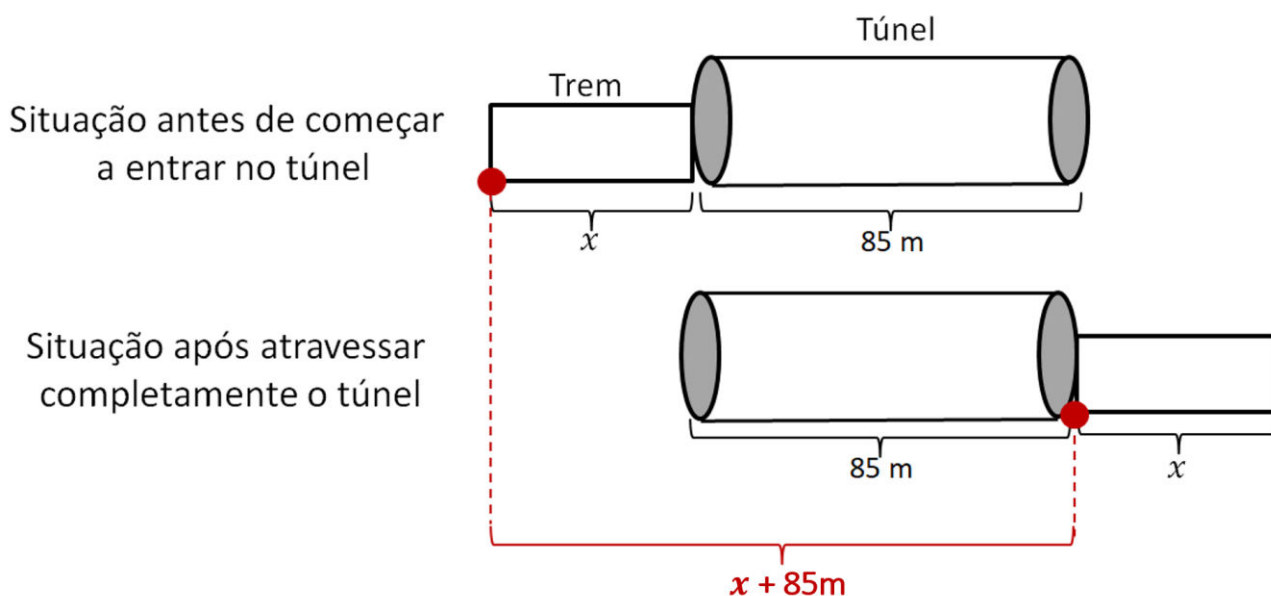
(TJ CE/2022) Um trem viaja a uma velocidade constante. Ele leva 5 s para atravessar completamente um túnel de 85 m e gasta 8 s para atravessar completamente um túnel de 160 m. O comprimento do trem, em metros, é

- a) 60.
- b) 30.
- c) 40.
- d) 50.
- e) 70.

Comentários:

Suponha que o **comprimento do trem, em metros, seja x** .

Na **primeira situação**, temos o seguinte esquema que representa o trem antes de começar a entrar no túnel e após atravessar completamente o túnel:



Perceba que, **para atravessar completamente o túnel**, o trem precisa percorrer uma **distância $x + 85m$** , que corresponde ao **comprimento do trem somado ao comprimento do túnel**.

Já que o trem apresenta uma **velocidade constante** ao longo de todo o trajeto, **esta velocidade é a velocidade média**.

Como o trem leva **5s** para percorrer a distância **$x + 85m$** , a velocidade constante **V** , em metros por segundo (**m/s**), é:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$
$$V = \frac{x + 85}{5}$$



Na **segunda situação**, o trem leva **8s** para atravessar completamente um túnel de **160 m** mantendo a mesma velocidade constante V . A distância percorrida, nessa segunda situação, será $x + 160\text{m}$. Logo:

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

$$V = \frac{x + 160}{8}$$

Igualando a velocidade V para as duas situações, temos:

$$\frac{x + 85}{5} = \frac{x + 160}{8}$$

Realizando a “multiplicação cruzada”, segue que:

$$8 \times (x + 85) = 5 \times (x + 160)$$

$$8x + 680 = 5x + 800$$

$$8x - 5x = 800 - 680$$

$$3x = 120$$

$$x = \frac{120}{3}$$

$$x = 60 \text{ m}$$

Portanto, **o comprimento do trem é 60 metros**.

Gabarito: Letra C.

(Senado/2022) Um tigre avista um javali a 1km de distância e sai, em linha reta, em seu encalço. Nesse instante, o javali foge na direção contrária à do tigre.

O tigre corre a 30m/s, e o javali tenta escapar a uma velocidade de 10m/s.

A distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre é igual a

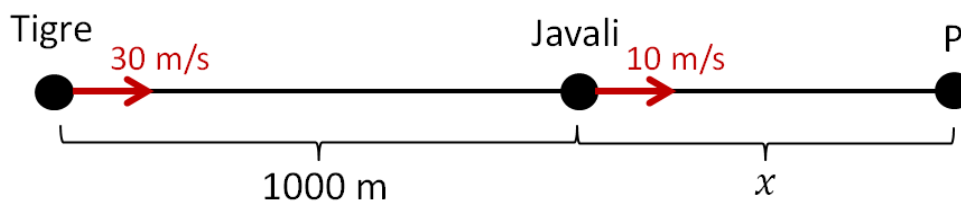
- a) 300m.
- b) 400m.
- c) 500m.
- d) 600m.
- e) 700m.

Comentários:

Suponha que a distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre seja x . Suponha, ainda, que o tigre alcance o javali no **ponto P**.



Como **1km** é igual a **1000m**, temos a seguinte representação do problema:



Como as velocidades são constantes, podemos utilizar o conceito de velocidade média.

$$\text{Velocidade Média} = \frac{\text{Distância percorrida}}{\text{Tempo}}$$

Suponha que o tigre e o javali se encontrem no ponto P **após t segundos**. Veja que:

- A velocidade média do tigre é **30 m/s**;
- A distância percorrida pelo tigre é **1000 + x metros**;
- O tempo em que o tigre percorre a distância 1000 + x é **t segundos**.

Logo:

$$30 = \frac{1000 + x}{t}$$
$$30t = 1000 + x$$

Além disso:

- A velocidade média do javali é **10 m/s**;
- A distância percorrida pelo javali é **x metros**;
- O tempo em que o javali percorre a distância x é **t segundos**.

Logo:

$$10 = \frac{x}{t}$$
$$10t = x$$
$$t = \frac{x}{10}$$

Substituindo $t = x/10$ na primeira equação, temos:

$$30t = 1000 + x$$
$$30 \times \frac{x}{10} = 1000 + x$$
$$3x = 1000 + x$$
$$3x - x = 1000$$



$$2x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{2}$$

$$x = 500 \text{ m}$$

Logo, **distância percorrida pelo javali até ser alcançado pelo tigre** é igual a **500m**.

Gabarito: Letra C.

Vazão

A **vazão** corresponde à razão entre um volume e um tempo.

$$\text{Vazão} = \frac{\text{Volume}}{\text{Tempo}}$$

No geral, problemas envolvendo vazão estão relacionados a torneiras que despejam em um recipiente um determinado volume de água em um determinado período de tempo.

Se o volume despejado for dado em **litros (l)** e o tempo for dado em **horas (h)**, a vazão será obtida em **litros por hora (l/h)**. Por exemplo, caso uma torneira encha um recipiente de 10 litros em 2h, a vazão é:

$$\text{Vazão} = \frac{10 \text{ l}}{2 \text{ h}} = 5 \text{ l/h}$$

A unidade da vazão dependerá das unidades de volume e de tempo consideradas. Caso tenhamos, por exemplo, uma torneira que encha um recipiente de 500ml em 2 minutos, a vazão será:

$$\text{Vazão} = \frac{500 \text{ ml}}{2 \text{ min}} = 250 \text{ ml/min}$$

A grande maioria dos problemas que envolvem o conceito de vazão está relacionada ao uso de torneiras. É muito comum que tenhamos as seguintes situações:

- Temos as **vazões individuais das torneiras** e queremos obter o **tempo em que as torneiras enchem um recipiente quando acionadas em conjunto**; e
- Temos a **vazão conjunta** e a **vazão de algumas torneiras** e queremos obter o **tempo em que uma determinada torneira enche um recipiente**.

Nesses casos, e em outros casos semelhantes, geralmente devemos montar uma equação em que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.





Em problemas envolvendo vazão, geralmente devemos utilizar o fato de que **a soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta**.

Vamos resolver alguns problemas.



(Pref Nova Odessa/2022) Uma torneira leva 4 horas para encher um determinado recipiente. Já uma segunda torneira leva 6 horas para encher esse mesmo recipiente. Assim, se as duas torneiras forem abertas juntas, quanto tempo irão levar para encher esse recipiente?

- a) 2 horas.
- b) 2 horas e 4 minutos.
- c) 2 horas e 24 minutos.
- d) 2 horas e 36 minutos.
- e) 2 horas e 56 minutos.

Comentários:

Suponha que o volume do recipiente em questão seja V .

A primeira torneira leva 4 horas para encher o recipiente de volume V . Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$
$$\text{Vazão}_1 = \frac{V}{4}$$

A segunda torneira leva 6 horas para encher o recipiente de volume V . Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$
$$\text{Vazão}_2 = \frac{V}{6}$$



A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{4} + \frac{V}{6}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{3V + 2V}{12}$$

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{5V}{12}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo t** em que as torneiras enchem conjuntamente o recipiente:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{t}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo:

$$\frac{5V}{12} = \frac{V}{t}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{t}$$

$$5t = 12$$

$$t = \frac{12}{5}$$

$$t = 2,4 \text{ horas}$$

Como **1h = 60 minutos**, temos que **0,4h** correspondem a:

$$0,4 \times 60 = 24\text{min}$$

Logo, **o tempo em que as torneiras irão levar para encher o recipiente conjuntamente é de 2 horas e 24 minutos.**

Gabarito: Letra C.

(Pref Linhares/2020) Uma torneira enche um tanque em 9 horas, uma outra pode fazer o mesmo serviço em 12 horas. Juntando a essas duas torneiras uma terceira, todas trabalhando ao mesmo tempo, o tanque ficará cheio em 4 horas. O tempo que a terceira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque seria de:

- a) 9 horas.
- b) 18 horas.
- c) 36 horas.



d) 72 horas.

e) 144 horas.

Comentários:

Suponha que o volume do tanque em questão seja V .

A primeira torneira leva 9 horas para encher o tanque de volume V . Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume}_1}{\text{Tempo}_1}$$
$$\text{Vazão}_1 = \frac{V}{9}$$

A segunda torneira leva 12 horas para encher o tanque de volume V . Logo, a sua vazão é:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume}_2}{\text{Tempo}_2}$$
$$\text{Vazão}_2 = \frac{V}{12}$$

Suponha que o tempo em que a terceira torneira enche o tanque sozinha seja t . Nesse caso, a vazão da terceira torneira é:

$$\text{Vazão}_3 = \frac{V}{t}$$

A **vazão conjunta** corresponde à razão entre o **volume do recipiente V** e o **tempo de 4 horas em que as três torneiras enchem conjuntamente o recipiente**:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{4}$$

A soma das vazões individuais corresponde à vazão conjunta. Logo:

$$\text{Vazão conjunta} = \frac{V}{9} + \frac{V}{12} + \frac{V}{t}$$

Igualando os dois valores para a vazão conjunta, podemos obter o tempo em que a terceira torneira enche o tanque trabalhando sozinha:

$$\frac{V}{9} + \frac{V}{12} + \frac{V}{t} = \frac{V}{4}$$

Simplificando o volume V , temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{t} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12} \\ \frac{1}{t} &= \frac{9 - 4 - 3}{36} \\ \frac{1}{t} &= \frac{2}{36} \\ \frac{1}{t} &= \frac{1}{18} \\ t &= 18 \text{ horas}\end{aligned}$$

Logo, o tempo que a terceira torneira levaria trabalhando sozinha para encher todo o tanque é de 18 horas.

Gabarito: Letra B.

(Pref. Cuiabá/2015) Duas caixas d'água iguais, posicionadas uma ao lado da outra, possuem, cada uma, capacidade de 900 litros, sendo que a primeira está cheia e a segunda, vazia.

A primeira caixa possui uma torneira que consegue esvaziá-la com vazão de 10 litros por hora e a segunda caixa possui uma torneira que consegue enchê-la com vazão de 15 litros por hora.

Abrindo as duas torneiras simultaneamente, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de

- a) 18 horas.
- b) 25 horas.
- c) 30 horas.
- d) 36 horas.
- e) 45 horas.

Comentários:

Temos **duas caixas iguais**, com capacidade de **900 litros**, sendo que inicialmente **a primeira está cheia de água** e a **segunda está vazia**. Além disso, **a primeira caixa deve ser esvaziada**, e **a segunda deve ser enchida com água**.

Note que, **para que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura**, **o volume que resta na primeira caixa** deve ser igual ao **volume que foi inserido na segunda caixa**.

Considere, então, que o tempo em horas que deve decorrer até que os níveis de água nas duas caixas estejam na mesma altura seja t . Em outras palavras, considere que o tempo em horas para que **o volume que resta na primeira caixa** seja igual ao **volume inserido na segunda caixa** seja t .



Para obter o tempo t , vamos seguir os seguintes passos:

- Obter o volume restante na primeira caixa em termos do tempo t ;
- Obter o volume inserido na segunda caixa em termos do tempo t ; e
- Igualar os volumes obtidos.

Volume restante na primeira caixa

O volume retirado da primeira caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_1 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{\text{Tempo}_1}$$

$$10 = \frac{\text{Volume retirado}_1}{t}$$

$$\text{Volume retirado}_1 = 10t$$

Portanto, o volume restante na primeira caixa depois de decorrido um tempo t é:

$$\text{Volume restante}_1 = 900 - \text{Volume retirado}_1$$

$$\text{Volume restante}_1 = 900 - 10t$$

Volume inserido na segunda caixa

O volume inserido na segunda caixa durante o período t é tal que:

$$\text{Vazão}_2 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{\text{Tempo}_2}$$

$$15 = \frac{\text{Volume inserido}_2}{t}$$

$$\text{Volume inserido}_2 = 15t$$

Igualar os volumes obtidos

Igualando o volume restante da primeira caixa e o volume inserido na segunda caixa, podemos obter o tempo em que os níveis de água nas duas caixas estão na mesma altura:

$$\text{Volume restante}_1 = \text{Volume inserido}_2$$

$$900 - 10t = 15t$$

$$900 = 10t + 15t$$

$$900 = 25t$$

$$25t = 900$$

$$t = \frac{900}{25}$$



$$t = 36 \text{ h}$$

Portanto, o tempo que deve decorrer até que os níveis da água nas duas caixas estejam na mesma altura é de **36 horas**.

Gabarito: Letra D.



PROPORCIONALIDADE

Proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C e D quando

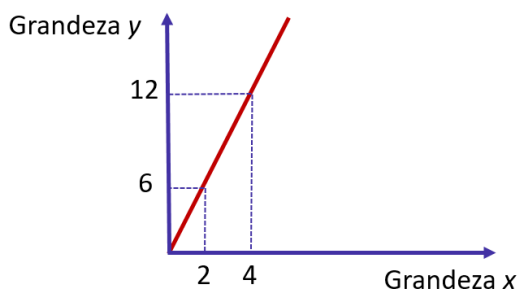
$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B}) \times (\text{Grandeza C}) \times (\text{Grandeza D})} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**.

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes diretamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas inversamente proporcionais

As expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$** .

Uma grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{(\text{Grandeza B})} \times \frac{1}{(\text{Grandeza C})} \times \frac{1}{(\text{Grandeza D})}} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

De outra forma, podemos dizer que grandeza A é inversamente proporcional às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{grandeza A}) \times (\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times (\text{grandeza D}) = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D

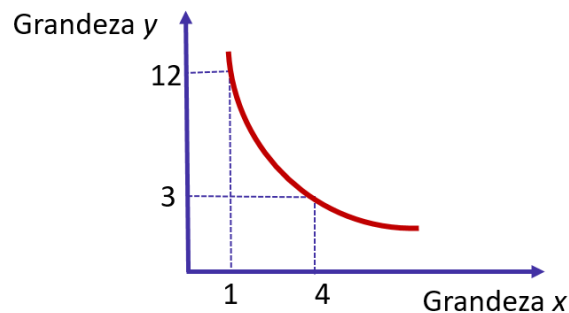


Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

De outra forma, podemos dizer que são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \dots = x_n \times y_n = k$$



Para resolver problemas de divisão em partes inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Grandezas direta e inversamente proporcionais

Se uma grandeza A for **diretamente** proporcional às **grandezas B e C** e **inversamente** proporcional às **grandezas D e E**, então:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{Grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{Grandeza E})}} = k$$

Para resolver problemas de divisão em partes direta e inversamente proporcionais, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".



Nesse capítulo, apresentaremos primeiro as definições para, em seguida, mostrar a aplicação delas em problemas que podem aparecer na sua prova.

Sabemos que a apresentação "crua" das definições pode não ser "facilmente digerível" em um primeiro momento, porém a resolução de problemas tornará as definições mais claras.

Grandezas diretamente proporcionais

Definição de grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante k , denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\text{Grandeza B}} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **diretamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{(\text{Grandeza B}) \times (\text{Grandeza C}) \times (\text{Grandeza D})} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas diretamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas diretamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Sem mais delongas, vamos a dois exemplos.



Quando uma questão disser que duas ou mais grandezas são **proporcionais**, entenda que elas são **diretamente proporcionais**

Em uma pizzeria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que os funcionários trabalharam 7 horas?



Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional à grandeza "horas trabalhadas".

$$\frac{\text{pizzas produzidas}}{\text{horas trabalhadas}} = k$$

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas. Logo:

$$\frac{80}{5} = k$$

Suponha que, ao trabalhar 7 horas, foram produzidas x pizzas. Então:

$$\frac{x}{7} = k$$

Com as duas igualdades acima, podemos escrever:

$$\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$$

Podemos realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade $\frac{80}{5} = \frac{x}{7}$. Temos:

$$5x = 80 \times 7$$

$$x = \frac{80 \times 7}{5}$$

$$x = 112 \text{ pizzas}$$

Observação: a partir desse momento, vamos escrever diretamente a igualdade do tipo $\frac{80}{5} = \frac{x}{7} = k$.

Vamos a um novo problema com mais grandezas envolvidas.

Em uma pizzeria, a produção diária de pizzas é proporcional ao número de horas trabalhadas pelos seus funcionários e ao número de funcionários presentes no expediente.

Em um determinado dia, foram produzidas 80 pizzas em 5 horas com 8 funcionários.

Quantas pizzas foram produzidas em um dia em que estavam presentes 10 funcionários trabalhando 7 horas?

Veja que a grandeza "pizzas produzidas" é diretamente proporcional às grandezas "horas trabalhadas" e "número de funcionários".

$$\frac{(\text{pizzas produzidas})}{(\text{horas trabalhadas}) \times (\text{número de funcionários})} = k$$



Supondo que foram produzidas x pizzas no dia em que 10 funcionários trabalharam 7 horas, temos:

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10} = k$$

Podemos simplificar $\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$ e realizar a "multiplicação cruzada" na igualdade.

$$\frac{80}{5 \times 8} = \frac{x}{7 \times 10}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{70}$$

$$2 \times 70 = 1 \times x$$

$$x = 140 \text{ pizzas}$$

Sequências diretamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são diretamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Onde k é uma constante denominada **constante de proporcionalidade**.

(Pref. Ananindeua/2019) A sequência numérica $(6, X, Y, 12)$ é diretamente proporcional a sequência $(3, 4, 5, 6)$. Qual o valor de $X+Y$?

- a) 8
- b) 18
- c) 16
- d) 20

Comentários:

Como a sequência $(6, X, Y, 12)$ é proporcional à sequência $(3, 4, 5, 6)$, temos que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = k$$

Qual é a constante de proporcionalidade k ? $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$.

Temos, portanto, que:

$$\frac{6}{3} = \frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{12}{6} = 2$$



Logo:

$$\frac{X}{4} = 2 \rightarrow X = 8$$

$$\frac{Y}{5} = 2 \rightarrow Y = 10$$

A soma procurada é $X + Y = 8 + 10 = 18$

Gabarito: Letra B.

Aspecto gráfico da proporcionalidade direta

Se duas grandezas são **diretamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, e quando uma grandeza diminui, a outra também diminui.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas diretamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

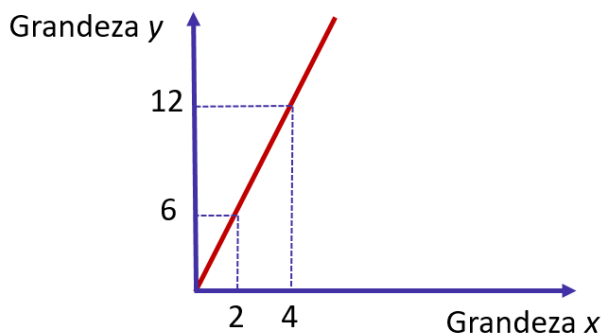
Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve dobrar. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza também deve ser multiplicada por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza também deve ser dividida por 3.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, graficamente, temos uma reta que passa pela origem. Isso porque quando uma grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x , temos:

$$\frac{y}{x} = k$$

$$y = kx$$

(Equação da reta que passa pela origem do plano cartesiano)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(2; 6)$. Quando x é multiplicado por 2, o y é multiplicado por 2, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 12)$.



(Pref. SJC/2019) Duas grandezas y e x , diretamente proporcionais, são representadas, graficamente, por uma função cuja expressão algébrica é:

a) $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \cdot b \cdot c \neq 0$

b) $y = ax^2 + bx$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

c) $y = ax^2$, com $a \neq 0$, real

d) $y = ax + b$, com a e b reais e $a \cdot b \neq 0$

e) $y = ax$, com $a \neq 0$, real

Comentários:

Duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas graficamente por uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

Assim, as grandezas y e x podem ser relacionadas pela função $y = ax$, com a diferente de zero. Nesse caso, a é a constante de proporcionalidade k .

Gabarito: Letra E.

Divisão em partes diretamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes proporcionais** (ou seja, em **partes diretamente proporcionais**) tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo:

Divida o número 2200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10.

Se as partes proporcionais a 5, 7 e 10 forem respectivamente a , b e c , então:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = k$$

A soma das partes é 2.200. Logo, $a + b + c = 2.200$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10}$, temos:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{a + b + c}{5 + 7 + 10}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = \frac{2.200}{22}$$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{10} = 100$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100.



$$\frac{a}{5} = 100 \rightarrow a = 500$$

$$\frac{b}{7} = 100 \rightarrow b = 700$$

$$\frac{c}{10} = 100 \rightarrow c = 1.000$$

Logo, ao dividir o número 2.200 em partes proporcionais a 5, 7 e 10, obtemos, respectivamente, 500, 700 e 1.000.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R\$ 13,00, outro com R\$ 14,00 e o terceiro com R\$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R\$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

- a) R\$ 1.950,00.
- b) R\$ 2.000,00.
- c) R\$ 2.050,00.
- d) R\$ 2.100,00.
- e) R\$ 2.150,00.

Comentários:

Se as partes proporcionais a R\$13, R\$14 e R\$22 forem respectivamente a , b e c , então:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes é o total do prêmio, isto é, $a + b + c = R\$ 7.350$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22}$, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 100. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é tal que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = 1.950$$

Gabarito: Letra A.



Algumas questões sobre divisões proporcionais podem ser mais complexas. Para resolvê-las, devemos nos ater aos princípios apresentados neste capítulo.

(SABESP/2019) Um pai pretende dividir R\$ 750,00 entre seus 3 filhos de tal forma que cada um receba uma quantia diretamente proporcional à sua própria idade. Se dois dos filhos receberão, respectivamente, R\$ 225,00 e R\$ 240,00, e se a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31 anos, então a idade do filho mais velho é

- a) 15
- b) 21
- c) 19
- d) 20
- e) 16

Comentários:

Se as quantias recebidas por dois filhos foram R\$225 e R\$240, a quantia recebida pelo terceiro filho é o que restou do total de R\$750:

$$750 - 225 - 240 = \text{R\$}285$$

Como cada filho recebeu uma quantia proporcional à idade, os filhos mais novos, de idades N_1 e N_2 , receberam as duas menores quantias, ou seja, receberam R\$225 e R\$240. Se a idade do filho mais velho é V , então temos a seguinte proporção:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = k$$

Lembre-se que a soma das idades dos dois filhos mais novos é 31. Logo, $N_1 + N_2 = 31$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" com as **duas primeiras razões** da proporção acima, temos:

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{225 + 240}{N_1 + N_2}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = \frac{465}{31}$$

$$\frac{225}{N_1} = \frac{240}{N_2} = \frac{285}{V} = 15$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15. Vamos obter a idade do filho mais velho:

$$\frac{285}{V} = 15$$

$$\frac{285}{15} = V$$

$$V = 19$$

Gabarito: Letra C.



Problemas de regra de sociedade

Em uma sociedade empresarial, os lucros ou os prejuízos costumam ser distribuídos entre as pessoas de maneira diretamente proporcional ao capital investido.

Em resumo, problemas de "regra de sociedade" são problemas de divisão proporcional com uma historinha envolvendo sócios de uma empresa ou de um negócio. Vejamos um exemplo.

(BB/2013) Uma empresa obteve um lucro líquido de R\$ 263.500,00. Esse lucro será dividido proporcionalmente às cotas da sociedade que cada um dos seus quatro sócios possui. O sócio majoritário detém 9 das cotas e os outros três sócios possuem, respectivamente, 1, 3 e 4 cotas da sociedade. A quantia, em reais, que o sócio que possui 3 cotas receberá nessa divisão é igual a

- a) 15.500,00.
- b) 139.500,00.
- c) 46.500,00.
- d) 62.000,00.
- e) 31.000,00.

Comentários:

O lucro líquido será dividido em partes proporcionais às cotas da sociedade. Se as partes proporcionais a 1, 3, 4 e 9 forem respectivamente a , b , c e d , temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = k$$

A soma das partes é o lucro líquido total, isto é, $a + b + c + d = \text{R\$ } 263.500$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9}$, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{a + b + c + d}{1 + 3 + 4 + 9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = \frac{263.500}{17}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{9} = 15.500$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 15.500. Vamos obter a quantia recebida pelo sócio que tem 3 cotas:

$$\frac{b}{3} = 15.500$$

$$b = 46.500$$

Gabarito: Letra C.



Grandezas inversamente proporcionais

Para trabalhar com **grandezas inversamente proporcionais**, devemos saber que as expressões a seguir querem dizer a mesma coisa:

- A é **inversamente proporcional** a B;
- A é **diretamente proporcional ao inverso de B**;
- A é **diretamente proporcional a $\frac{1}{B}$** .

Essa breve introdução é suficiente para resolver todos os problemas sobre grandezas inversamente proporcionais: basta **converter o problema de grandezas inversamente proporcionais em um problema de grandezas diretamente proporcionais**.

Vamos entrar em detalhes.

Definição de grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre a grandeza A e o inverso da grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{\text{Grandeza B}}} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Note que:

$$\frac{\text{Grandeza A}}{\frac{1}{\text{Grandeza B}}} = (\text{Grandeza A}) \times (\text{Grandeza B})$$

Podemos, então, reescrever a definição assim:

Uma grandeza A é **inversamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza A pela grandeza B é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\text{Grandeza A}) \times (\text{Grandeza B}) = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A e B.

Esse conceito pode ser estendido para quando temos mais de uma grandeza. Uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:



$$\frac{\text{Grandeza A}}{\left(\frac{1}{\text{Grandeza B}}\right) \times \left(\frac{1}{\text{Grandeza C}}\right) \times \left(\frac{1}{\text{Grandeza D}}\right)} = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Novamente, podemos reescrever o conceito, dizendo que uma grandeza A é **inversamente proporcional** às grandezas B, C e D quando:

$$(\text{Grandeza A}) \times (\text{Grandeza B}) \times (\text{Grandeza C}) \times (\text{Grandeza D}) = k$$

Para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente por A, B, C e D.

Problemas com grandezas inversamente proporcionais

Para resolver problemas com grandezas inversamente proporcionais, devemos utilizar os conceitos vistos anteriormente. Vamos a um exemplo.

Em uma fábrica de peças automotivas, o "custo fixo unitário da produção" é inversamente proporcional à quantidade de peças produzidas do tipo A e do tipo B.

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R\$ 50.

Determine o "custo fixo unitário da produção" em um mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B.

Veja que a grandeza "custo fixo unitário" é **inversamente proporcional** às grandezas "peças tipo A" e "peças tipo B".

Logo, a grandeza "custo fixo unitário" é **diretamente proporcional ao inverso** da grandeza "peças tipo A" e **ao inverso** da grandeza "peças tipo B".

$$\frac{(\text{custo fixo unitário})}{\left(\frac{1}{(\text{peças tipo A})}\right) \times \left(\frac{1}{(\text{peças tipo B})}\right)} = k$$

Em um determinado mês, foram produzidas 50 peças do tipo A e 100 peças do tipo B, gerando um custo fixo unitário de R\$50. Logo:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = k$$

Suponha que, no mês em que foram produzidas 25 peças do tipo A e 250 peças do tipo B, o custo fixo unitário seja C. Logo:

$$\frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$



Com as duas igualdades anteriores, podemos escrever:

$$\frac{50}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}} = \frac{C}{\frac{1}{25} \times \frac{1}{250}} = k$$

$$50 \times 50 \times 100 = C \times 25 \times 250$$

$$\frac{50 \times 50 \times 100}{25 \times 250} = C$$

$$C = R\$ 40$$

(SEFAZ BA/2022) Três grandezas L , M e N são tais que L é diretamente proporcional a M , e M é inversamente proporcional a N .

Quando $M = 4$ e $N = 18$, tem-se $L = 60$.

Quando $L = 45$, o valor de $M + N$ é

- a) 25.
- b) 26.
- c) 27.
- d) 28.
- e) 29.

Comentários:

Sabemos que a grandeza L é diretamente proporcional à grandeza M . Logo, sendo k_1 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{L}{M} = k_1$$

Além disso, a grandeza M é inversamente proporcional à grandeza N . Logo, sendo k_2 uma constante de proporcionalidade, temos:

$$MN = k_2$$

Quando $M = 4$ e $N = 18$, tem-se $L = 60$. Logo:

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{60}{4} = k_1 \rightarrow k_1 = 15$$

$$MN = k_2 \rightarrow 4 \times 18 = k_2 \rightarrow k_2 = 72$$



Devemos determinar o valor de $M + N$ para o caso em que $L = 45$.

$$\frac{L}{M} = k_1 \rightarrow \frac{45}{M} = 15 \rightarrow M = \frac{45}{15} \rightarrow M = 3$$

$$MN = k_2 \rightarrow 3 \times N = 72 \rightarrow N = 24$$

Logo, para $L = 45$, temos:

$$\begin{aligned} M + N &= 3 + 24 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra C.

Sequências inversamente proporcionais

Duas sequências $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ são inversamente proporcionais quando:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Onde k é uma constante denominada **constante de proporcionalidade**.

Essa definição equivale a dizer que as sequências são inversamente proporcionais quando:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \dots = k$$

(Pref. Cerquilho/2019) Assinale a alternativa que contém uma tabela apresentando duas grandezas inversamente proporcionais.

a)

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

b)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7

c)

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6

d)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1

e)

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1

Comentários:

Para duas sequências serem inversamente proporcionais, a multiplicação das grandezas deve ser sempre igual a uma constante, isto é:

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \dots = k$$



Vamos analisar cada alternativa.

A) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	3	4	5	6	7	8
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	36	44	50	54	56	56

B) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	12	11	10	9	8	7
Produto xy	96	77	60	45	32	21

C) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	8	7	6	5	4	3
Grandeza y	16	14	12	10	8	6
Produto xy	128	98	72	50	32	18

D) O produto dos elementos das duas sequências é constante e igual a 32. **Este é o gabarito.**

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	32	16	8	4	2	1
Produto xy	32	32	32	32	32	32

E) O produto dos elementos das duas sequências não é constante.

Grandeza x	1	2	4	8	16	32
Grandeza y	-4	-3	-2	-1	0	1
Produto xy	-4	-6	-8	-8	0	32

Gabarito: Letra D.

Aspecto gráfico da proporcionalidade inversa

Se duas grandezas são **inversamente proporcionais**, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui, e quando uma grandeza diminui, a outra aumenta.

Ocorre que essa descrição qualitativa não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas inversamente proporcionais, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade. Se a primeira grandeza quintuplicar, a segunda grandeza deve ser dividida por 5. Se a primeira grandeza for dividida por 3, a segunda grandeza deve ser triplicada.

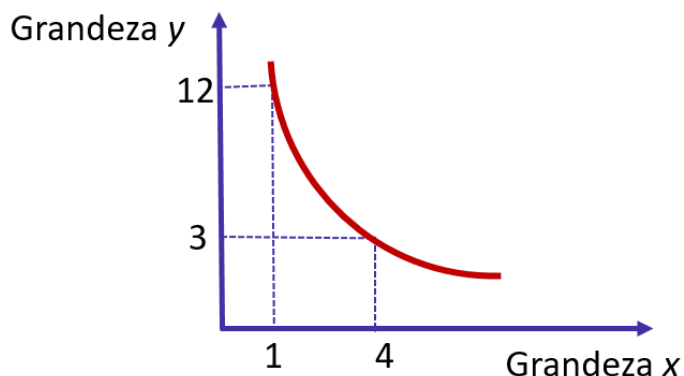
Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, graficamente, temos uma curva chamada **hipérbole**.



$$\frac{y}{1/x} = k$$

$$y = \frac{k}{x}$$

(Hipérbole)



Perceba, no exemplo do gráfico, que temos um ponto $(x; y)$ dado pelo par $(1; 12)$. Quando x é multiplicado por 4, o y é dividido por 4, e o novo ponto $(x; y)$ obtido é $(4; 3)$.

(Pref. Campinas/2019) A professora Alice perguntou aos seus alunos o que são grandezas inversamente proporcionais. Analise o diálogo entre um grupo de alunos sobre esse significado:

Júlia:	Analiso a variação de duas grandezas: se uma das grandezas aumenta e a outra diminui, então essas grandezas são necessariamente inversamente proporcionais.
Caio:	Você está errada Júlia, pois há situações em que isso ocorre e as grandezas não são inversamente proporcionais. Essa sua afirmação é necessária, mas não é suficiente para indicar se as grandezas são inversamente proporcionais.
André:	Se uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, essas grandezas são diretamente proporcionais e, se uma aumenta e a outra diminui elas são inversamente proporcionais.
Luana:	Eu não analiso esse aspecto de diminuir e aumentar apenas. Se uma grandeza x for inversamente proporcional a y , os produtos dos valores de x pelos correspondentes valores de y são necessariamente iguais.

Considerando as ideias apresentadas pelos quatro estudantes, é correto afirmar que são verdadeiras apenas as argumentações de

- a) Júlia e Luana.
- b) Júlia e André.



- c) Caio e Luana.
- d) Caio e André.
- e) André e Luana.

Comentários:

Vamos comentar cada ideia apresentada pelos estudantes.

Júlia: O fato de uma das grandezas aumentar enquanto a outra diminui **não necessariamente define que as grandezas são inversamente proporcionais**.

Isso porque é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**. Isso significa que se a primeira grandeza dobrar, a segunda grandeza deve reduzir pela metade, por exemplo.

Podemos mostrar o seguinte **contraexemplo** para o argumento de Júlia: considere duas grandezas, dadas por x e y , tais que $y = \frac{1}{x} + 1$. Se x for de 2 para 4, y vai de $\frac{3}{2}$ para $\frac{5}{4}$. Veja que, nesse exemplo, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui. Ocorre que, nesse caso, **x dobrou e y não diminuiu pela metade**.

Caio: O argumento de Caio está correto. Para duas grandezas serem inversamente proporcionais é necessário que, quando uma aumenta, a outra diminui. Ocorre que isso não é suficiente para que as grandezas sejam inversamente proporcionais: é necessário que **uma grandeza diminua na mesma proporção em que a outra aumenta**.

André: André errou pelo mesmo motivo de Júlia, por não especificar a forma em que as grandezas devem aumentar/diminuir.

Nas grandezas diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta **na mesma proporção**. Nas grandezas inversamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui **na mesma proporção**.

Luana: Luana definiu corretamente grandezas inversamente proporcionais: os produtos dos valores das duas grandezas devem ser iguais a uma constante.

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2 = x_3 \times y_3 = \dots = k$$

As argumentações verdadeiras são as do **Caio** e da **Luana**.

Gabarito: Letra C.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes inversamente proporcionais a alguns números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".



Divida o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20.

Se as partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20 forem respectivamente a , b e c , então:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = k$$

A soma das partes é 700. Logo, $a + b + c = 700$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{a + b + c}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{10}} = \frac{c}{\frac{1}{20}} = \frac{700}{\frac{4 + 2 + 1}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = \frac{700}{\frac{7}{20}}$$

$$5a = 10b = 20c = 700 \times \frac{20}{7}$$

$$5a = 10b = 20c = 2.000$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 2.000.

$$5a = 2.000 \rightarrow a = 400$$

$$10b = 2.000 \rightarrow b = 200$$

$$20c = 2.000 \rightarrow c = 100$$

Logo, ao dividir o número 700 em partes inversamente proporcionais a 5, 10 e 20, obtemos, respectivamente, 400, 200 e 100.

As questões de concurso público costumam apresentar uma contextualização. Veja um exemplo.

(BANESTES/2018) Em um terminal de autoatendimento bancário há apenas cédulas de R\$ 10,00, R\$ 20,00 e R\$ 50,00.

As quantidades de cada um dos três tipos de cédula na máquina são inversamente proporcionais aos seus valores.

Se há 272 cédulas ao todo, então a quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:



- a) R\$ 3.600,00;
- b) R\$ 3.960,00;
- c) R\$ 4.050,00;
- d) R\$ 4.240,00;
- e) R\$ 4.800,00.

Comentários:

Se as quantidades de cédulas de R\$10, R\$20 e R\$50 forem respectivamente a , b e c , então:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{20} = \frac{c}{50} = k$$

A soma do número de cédulas é 272, isto é, $a + b + c = 272$.

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção, temos:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{20} = \frac{c}{50} = \frac{a+b+c}{10+20+50}$$

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{20} = \frac{c}{50} = \frac{272}{10+20+50}$$

$$10a = 20b = 50c = \frac{272 \cdot 100}{17}$$

$$10a = 20b = 50c = 272 \times \frac{100}{17}$$

$$10a = 20b = 50c = 1.600$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.600. O número de cédulas de cada tipo é:

$$10a = 1.600 \rightarrow a = 160$$

$$20b = 1.600 \rightarrow b = 80$$

$$50c = 1.600 \rightarrow c = 32$$

Temos, portanto, 160 cédulas de R\$10, 80 cédulas de R\$20 e 32 cédulas de R\$50. A quantidade total de dinheiro armazenado no terminal é:

$$\begin{aligned} 160 \times R\$10 + 80 \times R\$20 + 32 \times R\$50 \\ = R\$4.800 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.



Grandezas direta e inversamente proporcionais

Quando se apresentam problemas em que uma grandeza A é diretamente proporcional a algumas grandezas e inversamente proporcional a outras grandezas, **devemos transformar tudo para grandezas diretamente proporcionais**.

Se uma grandeza A for diretamente proporcional às grandezas B e C e inversamente proporcional às grandezas D e E, então podemos dizer que **a grandeza A é diretamente proporcional às grandezas B, C, $1/D$ e $1/E$** . Logo:

$$\frac{(\text{grandeza A})}{(\text{grandeza B}) \times (\text{grandeza C}) \times \frac{1}{(\text{grandeza D})} \times \frac{1}{(\text{grandeza E})}} = k$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade.

Problemas com grandezas direta e inversamente proporcionais

Vamos a um problema.

Em uma fábrica de parafusos, a receita em reais obtida em um mês é diretamente proporcional ao número de parafusos produzidos e inversamente proporcional à cotação do dólar.

Em um determinado mês, foram produzidos 1.000.000 de parafusos e a receita foi de R\$ 10.000,00, sendo o dólar cotado a R\$ 2,50.

Determine a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar cotado a R\$ 5,00.

Veja que a grandeza "receita obtida" é diretamente proporcional a grandeza "número de parafusos" e inversamente proporcional à grandeza "cotação do dólar".

$$\frac{(\text{receita obtida})}{(\text{número de parafusos}) \times \frac{1}{(\text{cotação do dólar})}} = k$$

Supondo que a receita em reais obtida ao se produzir 500.000 parafusos com o dólar a R\$ 5,00 foi x , então:

$$\frac{10.000}{1.000.000 \times \frac{1}{2,5}} = \frac{x}{500.000 \times \frac{1}{5}} = k$$

$$\frac{10.000 \times 2,5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000} = k$$



Podemos simplificar a proporção $\frac{10.000 \times 2,5}{1.000.000} = \frac{x \times 5}{500.000}$ para depois realizar a "multiplicação cruzada". Simplificando os denominadores de lados diferentes da igualdade por 500.000, temos:

$$\frac{10.000 \times 2,5}{2} = \frac{x \times 5}{1}$$

Realizando a "multiplicação cruzada", temos:

$$\begin{aligned} 2 \times (x \times 5) &= 10.000 \times 2,5 \times 1 \\ 10x &= 25.000 \\ x &= 2.500 \end{aligned}$$

Logo, a receita em reais obtida foi de R\$ 2.500,00.

Divisão em partes direta e inversamente proporcionais

Problemas de divisão em **partes direta e inversamente proporcionais** tratam da divisão de uma quantia em partes proporcionais a alguns números e inversamente proporcionais a outros números.

Para resolver esse tipo de problema, pode ser necessário utilizar as "**propriedades fundamentais das proporções**".

Vamos a um exemplo.

Um pai quer dividir a quantia de R\$ 15.000 a seus três filhos Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo de modo diretamente proporcional às notas obtidas em uma prova de matemática e de modo inversamente proporcional ao tempo semanal que eles jogam videogame.

Arnaldo obteve 10 em matemática e joga videogame durante 10h por semana.

Bernaldo obteve 8 em matemática e joga videogame durante 2h por semana.

Cernaldo obteve 5 em matemática e joga videogame durante 1h por semana.

Qual foi a quantia em reais que cada filho recebeu?

A quantia foi dividida em partes **diretamente proporcionais** à nota obtida em matemática e **inversamente proporcionais** ao **tempo dispendido com videogame**.

Se Arnaldo recebeu a quantia A, Bernaldo recebeu a quantia B e Cernaldo recebeu a quantia C, temos a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} \frac{A}{10 \times \frac{1}{10}} &= \frac{B}{8 \times \frac{1}{2}} = \frac{C}{5 \times \frac{1}{1}} = k \\ \frac{A}{1} &= \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k \end{aligned}$$



Temos que a soma das quantias recebidas é R\$ 15.000.

$$A + B + C = 15.000$$

Utilizando a "**propriedade fundamental da soma**" na proporção $\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$, temos:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{1 + 4 + 5}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{15.000}{10}$$

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = 1.500$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{A}{1} = 1.500 \rightarrow A = 1.500$$

$$\frac{B}{4} = 1.500 \rightarrow B = 6.000$$

$$\frac{C}{5} = 1.500 \rightarrow C = 7.500$$

Logo, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo receberam, respectivamente, R\$ 1.500, R\$ 6.000 e R\$ 7.500.



QUESTÕES COMENTADAS – VUNESP

Frações

1.(VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) A expectativa de vida numa região da Europa é de, aproximadamente, 85 anos. Uma pessoa que já viveu $\frac{15}{17}$ dessa idade, ainda tem para viver, segundo a expectativa, aproximadamente,

- a) 2 anos.
- b) 10 anos.
- c) 13 anos.
- d) 15 anos.
- e) 17 anos.

Comentários:

A pessoa em questão já viveu $\frac{15}{17}$ da expectativa de vida de 85 anos. Logo, ela já viveu:

$$\begin{aligned} & \frac{15}{17} \text{ de } 85 \\ &= \frac{15}{17} \times 85 \end{aligned}$$

Simplificando 85 e 17 por 17, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{15}{1} \times 5 \\ &= 75 \text{ anos} \end{aligned}$$

Como a pessoa **já viveu 75 anos**, o número de anos que restam para viver, segundo a expectativa, é:

$$85 - 75 = 10 \text{ anos}$$

O **gabarito**, portanto, é **letra B**.

Cumprе destacar que essa questão pode também ser resolvida por meio do conceito de **fração complementar**. Como a pessoa viveu $\frac{15}{17}$ da expectativa de vida, a **fração complementar** corresponde à fração da expectativa de vida que resta para a pessoa viver:



$$1 - \frac{15}{17} = \frac{17 - 15}{17}$$
$$= \frac{2}{17}$$

Logo, a pessoa em questão ainda tem para viver $\frac{2}{17}$ dos 85 anos:

$$\frac{2}{17} \text{ de } 85$$
$$= \frac{2}{17} \times 85$$

Simplificando 85 e 17 por 17, temos:

$$\frac{2}{1} \times 5$$
$$= 10 \text{ anos}$$

Novamente, obtemos como **gabarito** a **letra B**.

Gabarito: Letra B.

2. (VUNESP/Pref. Marília/2023) Segundo dados do IBGE, em 2010, a população urbana de Marília era de, aproximadamente, 207.000 pessoas. Considerando-se que a população urbana representava, à época, cerca de $\frac{23}{24}$ da população, então a população de Marília naquele ano era de, aproximadamente,

- a) 8.625
- b) 9.000
- c) 198.375
- d) 207.000
- e) 216.000

Comentários:

Considere que a **população total de Marília era x** . Devemos determinar essa incógnita x .

Segundo o enunciado, a população urbana de Marília era de **207.000 pessoas**, e essa população urbana corresponde a $\frac{23}{24}$ da **população total**. Logo:



$$\frac{23}{24} \text{ da (População total de Marília) } = 207.000$$

$$\frac{23}{24} \times x = 207.000$$

$$x = 207.000 \times \frac{24}{23}$$

Simplificando 207.000 e 23 por 23, temos:

$$x = 9000 \times \frac{24}{1}$$

$$x = 216.000 \text{ pessoas}$$

Logo, a **população total de Marília** naquele ano era de **216.000 pessoas**. O **gabarito**, portanto, é **letra E**.

Cumpre destacar que uma **forma prática de se obter o todo a partir da parte** é utilizar o recurso **"inverte e multiplica"**.

Veja que, se $\frac{23}{24}$ da população total de Marília corresponde a 207.000 pessoas, **podemos obter o todo invertendo a fração** e multiplicando pelo valor que representa a parte (207.000 pessoas):

$$\frac{24}{23} \times 207.000$$

Simplificando 207.000 e 23 por 23, temos:

$$\frac{24}{1} \times 9.000$$

$$= 216.000 \text{ pessoas}$$

Novamente, obtemos a **letra E** como **gabarito**.

Gabarito: Letra E.

3. (VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) Os alunos de uma turma serão divididos em grupos contendo a mesma quantidade de estudantes em cada grupo. No dia da divisão, $\frac{2}{7}$ dos alunos faltaram, e a professora fez a divisão somente com os alunos presentes. Desse modo, após a divisão dos alunos presentes em 5 grupos iguais, a fração que representa o número de alunos em cada grupo, em relação ao total de alunos da turma, é igual a



- a) $\frac{2}{7}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{7}$
- d) $\frac{2}{35}$
- e) $\frac{1}{35}$

Comentários:

Considere que o total de alunos da turma é T .

Sabemos que, no dia da divisão, $\frac{2}{7}$ do total de alunos faltaram. Logo, o número de alunos que faltaram é:

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} \text{ de } T &= \frac{2}{7} \times T \\ &= \frac{2T}{7}\end{aligned}$$

O número de alunos presentes corresponde ao total de alunos menos os que faltaram. Logo, o número de alunos presentes é:

$$\begin{aligned}T - \frac{2T}{7} &= \frac{7T - 2T}{7} \\ &= \frac{5T}{7}\end{aligned}$$

Os $\frac{5T}{7}$ alunos presentes foram divididos em 5 grupos iguais. Logo, cada grupo ficou com o seguinte número de alunos:

$$\frac{1}{5} \text{ de } \frac{5T}{7} = \frac{1}{5} \times \frac{5T}{7}$$

Simplificando 5 com 5, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} \times \frac{T}{7} \\ &= \frac{T}{7}\end{aligned}$$

Portanto, cada grupo ficou com $\frac{1}{7}$ do total T de alunos. O gabarito, portanto, é letra C.

Gabarito: Letra C.



4.(VUNESP/Pref. Piracicaba/2023) Um restaurante fez a seguinte promoção:

Promoção
Almoço com tudo incluso
Clientes
De 13 a 59 anos – preço inteiro
60 anos ou mais – pagam $\frac{1}{2}$
Até 12 anos – pagam $\frac{1}{3}$

Para comemorar seu aniversário de 65 anos, Jonas levou seu filho de 40 anos, sua nora de 38 anos e seus três netos de 6, 9 e 14 anos para almoçarem no restaurante com a promoção dada. A conta final ficou em R\$ 250,00.

O preço inteiro do almoço nesse restaurante é de

- a) R\$ 40,00.
- b) R\$ 48,00.
- c) R\$ 55,00.
- d) R\$ 60,00.
- e) R\$ 65,00.

Comentários:

Considere que o preço inteiro do almoço no restaurante é P . Devemos determinar essa incógnita P .

Segundo o problema, temos:

- **1 pessoa** com **60 anos ou mais**: Jonas;
- **3 pessoas** com idade **entre 13 e 59 anos**: o filho, a nora e o neto de 14 anos de Jonas;
- **2 pessoas** com idade **até 12 anos**: os netos de 6 e 9 anos de Jonas.

Ainda segundo o problema:

- Pessoas com **60 anos ou mais** pagam metade do preço inteiro P , ou seja, **pagam $\frac{P}{2}$** ;
- Pessoas com idade **entre 13 e 59 anos** **pagam o preço inteiro P** ; e
- Pessoas com idade **até 12 anos** pagam um terço do preço inteiro P , ou seja, **pagam $\frac{P}{3}$** .

Logo, **o total pago pelas 6 pessoas**, em termos do preço inteiro P , é:



$$\begin{aligned}1 \times \frac{P}{2} + 3 \times P + 2 \times \frac{P}{3} \\&= \frac{P}{2} + 3P + \frac{2P}{3} \\&= \frac{3P + 18P + 4P}{6} \\&= \frac{25P}{6}\end{aligned}$$

Como a conta final ficou em R\$ 250,00, temos:

$$\begin{aligned}\frac{25P}{6} &= 250 \\P &= \frac{250 \times 6}{25}\end{aligned}$$

Simplificando 250 e 25 por 25, temos:

$$\begin{aligned}P &= \frac{10 \times 6}{1} \\P &= \text{R\$ } 60,00\end{aligned}$$

Logo, o preço inteiro do almoço nesse restaurante é de **R\$ 60,00**.

Gabarito: Letra D.

5.(VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) Em um grupo, com determinado número de pessoas, somente $\frac{3}{8}$ havia tomado certa vacina e o respectivo reforço dela. Entre as demais pessoas, $\frac{4}{5}$ havia tomado somente a vacina e as outras 15 pessoas não tinham tomado a vacina. O número de pessoas que havia tomado somente a vacina era

- a) 120.
- b) 100.
- c) 80.
- d) 60.
- e) 40.

Comentários:



Considere que o total de pessoas do grupo é T .

"Em um grupo, com determinado número de pessoas, somente $\frac{3}{8}$ havia tomado certa vacina e o respectivo reforço dela"

Logo, o número de pessoas que tomaram a vacina com o reforço é:

$$\frac{3}{8} \text{ de } T = \frac{3}{8} \times T$$
$$= \frac{3T}{8}$$

"Entre as demais pessoas, $\frac{4}{5}$ havia tomado somente a vacina..."

As **demais pessoas**, que não tomaram a vacina com o reforço, totalizam:

$$T - \frac{3T}{8} = \frac{8T - 3T}{8}$$
$$= \frac{5T}{8}$$

Entre essas pessoas, $\frac{4}{5}$ tomaram somente a vacina. Logo, **o número de pessoas que tomaram somente a vacina foi:**

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{5T}{8} = \frac{4}{5} \times \frac{5T}{8}$$
$$= \frac{1}{1} \times \frac{1T}{2}$$
$$= \frac{T}{2}$$

"...as outras 15 pessoas não tinham tomado a vacina."

O **número de pessoas que não tomaram a vacina** corresponde a:

$$\underbrace{T}_{\text{Total de pessoas}} - \underbrace{\frac{3T}{8}}_{\text{Pessoas que tomaram vacina com reforço}} - \underbrace{\frac{T}{2}}_{\text{Pessoas que tomaram somente vacina}}$$
$$= \frac{8T - 3T - 4T}{8}$$
$$= \frac{T}{8}$$



Esse número de pessoas que não tomaram a vacina **corresponde a 15 pessoas**. Logo:

$$\frac{T}{8} = 15$$

$$T = 8 \times 15$$

$$T = 120 \text{ pessoas}$$

O enunciado pergunta pelo número de pessoas que havia tomado somente a vacina:

$$\frac{T}{2} = \frac{120}{2}$$

$$= 60 \text{ pessoas}$$

Gabarito: Letra D.

6.(VUNESP/CAMPREV/2023) Considere 4 recipientes de capacidades totais iguais, cada um deles contendo quantidades diferentes de um mesmo líquido, que correspondem, respectivamente, a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ da capacidade total. Roger juntou todo esse líquido em uma vasilha, e em seguida, usou esse líquido para preencher totalmente 2 dos recipientes, sem transbordar. Após esse preenchimento, a quantidade de líquido que restou na vasilha corresponde, da capacidade total de um recipiente, a

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{6}$

Comentários:

Suponha que **cada um dos quatro recipientes** tenha **capacidade C**.

Os recipientes contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, que correspondem a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ da capacidade total. Logo, o **volume de líquido total que estava nos quatro recipientes** é:

$$\frac{1}{2} \text{ de } C + \frac{3}{4} \text{ de } C + \frac{2}{3} \text{ de } C + \frac{1}{4} \text{ de } C$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times C + \frac{3}{4} \times C + \frac{2}{3} \times C + \frac{1}{4} \times C \\ &= \frac{C}{2} + \frac{3C}{4} + \frac{2C}{3} + \frac{C}{4} \\ &= \frac{6C + 9C + 8C + 3C}{12} \\ &= \frac{26C}{12} \\ &= \frac{13C}{6} \end{aligned}$$

Esse líquido, com volume total de $\frac{13C}{6}$, foi colocado em uma vasilha.

Após preencher dois recipientes com a mesma capacidade original (C), a quantidade de líquido que restou na vasilha foi:

$$\begin{aligned} &\frac{13C}{6} - 2C \\ &= \frac{13C - 12C}{6} \\ &= \frac{C}{6} \end{aligned}$$

Logo, a quantidade de líquido que restou na vasilha corresponde a $\frac{1}{6}$ da capacidade total de um recipiente (C).

Gabarito: Letra E.

7.(VUNESP/ISS Jaguariúna/2023) Do total de documentos a serem analisados, a quinta parte foi analisada por Carla no dia de ontem, a quarta parte do restante foi analisada por Elias no dia de hoje, e cada metade dos documentos não analisados ontem e hoje serão analisados por Rodrigo e Cintia, amanhã. Sendo assim, é correto afirmar que

- a) Carla analisou mais documentos do que os que serão analisados por Rodrigo.
- b) Elias analisou mais documentos do que os que serão analisados por Cintia.
- c) Rodrigo analisará a mesma quantidade de documentos que foi analisada por Elias.
- d) Cintia analisará a mesma quantidade de documentos que foi analisada por Carla.
- e) Cintia e Rodrigo analisarão mais documentos do que os que foram analisados por Carla e Elias.



Comentários:

Para resolver essa questão, é interessante arbitrarmos um número total de documentos para evitarmos trabalhar com frações. Suponha, portanto, que o total de documentos é 100.

- A quinta parte foi analisada por Carla no dia de ontem. Logo:
 - O número de documentos analisados por Carla foi $\frac{1}{5} \times 100 = 20$.
 - O número de documentos restantes foi $100 - 20 = 80$.
- A quarta parte do restante foi analisada por Elias no dia de hoje. Logo:
 - O número de documentos analisados por Elias foi $\frac{1}{4} \times 80 = 20$.
 - O número de documentos restantes foi $80 - 20 = 60$.
- Cada metade dos documentos não analisados ontem e hoje serão analisados por Rodrigo e Cintia, amanhã. Logo:
 - Rodrigo e Cintia analisarão, cada um, $\frac{60}{2} = 30$ documentos.

Note que:

- O total de documentos analisados por Cintia e Rodrigo é $30+30 = 60$ documentos; e
- O total de documentos analisados por Carla e Elias é $20+20 = 40$ documentos.

Portanto, é correto afirmar que Cintia e Rodrigo analisarão mais documentos do que os que foram analisados por Carla e Elias.

Gabarito: Letra E.

8.(VUNESP/Pref. Sorocaba/2023) Em um escritório trabalham Alex, Beto e Caio. Certo dia, esses rapazes receberam um determinado número de documentos para serem arquivados. Alex iniciou o serviço e ele primeiro arquivou 5 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou. Em seguida, Beto arquivou 10 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou. Finalmente, Caio arquivou os documentos restantes. Sabendo que Alex e Beto arquivaram o mesmo número de documentos, o número de documentos que Caio arquivou foi

- a) 10.
- b) 20.
- c) 30.
- d) 40.
- e) 50.



Comentários:

Considere que o total de documentos a serem arquivados é D .

“Alex iniciou o serviço e ele primeiro arquivou 5 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou.”

Após arquivar 5 documentos, restaram $(D - 5)$ documentos para serem arquivados. Desses $(D - 5)$ documentos, Alex arquivou um quinto. Logo, o total de documentos arquivados por Alex é:

$$\begin{aligned} & 5 + \frac{1}{5} \text{ de } (D - 5) \\ &= 5 + \frac{1}{5} \times (D - 5) \\ &= 5 + \frac{D}{5} - \frac{5}{5} \\ &= 5 + \frac{D}{5} - 1 \\ &= \frac{D}{5} + 4 \end{aligned}$$

Após esse arquivamento, restou o seguinte número de documentos para serem arquivados:

$$\begin{aligned} & D - \left(\frac{D}{5} + 4 \right) \\ &= D - \frac{D}{5} - 4 \\ &= \frac{5D - D}{5} - 4 \\ &= \frac{4D}{5} - 4 \end{aligned}$$

“Em seguida, Beto arquivou 10 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou.”

Após arquivar 10 documentos, o número de documentos que restou foi:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4D}{5} - 4 \right) - 10 \\ &= \frac{4D}{5} - 14 \end{aligned}$$



Além dos 10 documentos, Beto arquivou um quinto do que restou. Logo, **o total de documentos arquivados por Beto é:**

$$\begin{aligned} & 10 + \frac{1}{5} \text{ de } \left(\frac{4D}{5} - 14 \right) \\ &= 10 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{4D}{5} - 14 \right) \\ &= 10 + \frac{4D}{25} - \frac{14}{5} \\ &= \frac{4D}{25} + 10 - \frac{14}{5} \\ &= \frac{4D}{25} + \frac{50 - 14}{5} \\ &= \frac{4D}{25} + \frac{36}{5} \end{aligned}$$

“Alex e Beto arquivaram o mesmo número de documentos”

A partir dessa informação, podemos obter o número total de documentos (D):

$$\underbrace{\frac{D}{5} + 4}_{\text{Documentos arquivados por Alex}} = \underbrace{\frac{4D}{25} + \frac{36}{5}}_{\text{Documentos arquivados por Beto}}$$

$$\frac{D}{5} - \frac{4D}{25} = \frac{36}{5} - 4$$

$$\frac{5D - 4D}{25} = \frac{36 - 20}{5}$$

$$\frac{D}{25} = \frac{16}{5}$$

$$D = 25 \times \frac{16}{5}$$

$$D = 5 \times \frac{16}{1}$$

$$D = 80 \text{ documentos}$$

Note, então, que **o número de documentos arquivados por Alex é:**



$$\begin{aligned}\frac{D}{5} + 4 &= \frac{80}{5} + 4 \\ &= 16 + 4 \\ &= 20\end{aligned}$$

Como Beto arquivou o mesmo número de documentos que Alex, **Beto também arquivou 20 documentos.**

Segundo o enunciado, após Alex e Beto arquivarem alguns documentos, **Caio arquivou os documentos restantes.** Logo, Caio arquivou:

$$\begin{array}{rcccl}\text{80} & - & \text{20} & - & \text{20} \\ \text{Total de} & & \text{Documentos} & & \text{Documentos} \\ \text{documentos} & & \text{arquivados} & & \text{arquivados} \\ & & \text{por Alex} & & \text{por Beto}\end{array}$$
$$= 40 \text{ documentos}$$

Gabarito: Letra D.

9.(VUNESP/ALESP/2022) Uma pessoa deve R\$ 3.000,00 e vai pagar essa dívida em prestações mensais. O valor de cada prestação é igual à décima parte da dívida restante no momento do pagamento. Não há incidência de juros sobre a dívida. Realizados 3 pagamentos, essa pessoa ainda deve um valor, em reais, entre

- a) 2.130 e 2.150.
- b) 2.150 e 2.170.
- c) 2.090 e 2.110.
- d) 2.170 e 2.190.
- e) 2.110 e 2.130.

Comentários:

Segundo o enunciado, **valor de cada prestação é igual $\frac{1}{10}$ da dívida restante no momento do pagamento.**

Inicialmente, a pessoa deve 3.000 reais. Logo:

- A **primeira parcela** é de $\frac{1}{10} \times 3000 = 300$;
- A **dívida restante** é $3000 - 300 = 2700$.



Após o pagamento da primeira parcela, a pessoa deve 2.700 reais. Logo:

- A **segunda parcela** é de $\frac{1}{10} \times 2700 = 270$;
- A **dívida restante** é $2700 - 270 = 2430$.

Após o pagamento da segunda parcela, a pessoa deve 2.430 reais. Logo:

- A **terceira parcela** é de $\frac{1}{10} \times 2430 = 243$;
- A **dívida restante** é $2430 - 243 = 2187$.

Logo, realizados 3 pagamentos, a pessoa ainda deve um valor, em reais, **entre 2.170 e 2.190**.

Gabarito: Letra D.

10. (VUNESP/PM SP/2022) De um valor total disponível em reais, a quarta parte foi destinada para o pagamento de um compromisso A; com a metade do que não foi utilizado para o compromisso A, pagou-se um compromisso B; e o restante, R\$ 187,50, foi depositado em um investimento.

A diferença entre o que foi investido e o que foi destinado para o pagamento do compromisso A é de

- a) R\$ 18,00.
- b) R\$ 62,50.
- c) R\$ 36,00.
- d) R\$ 54,50.
- e) R\$ 0,00.

Comentários:

Suponha que o valor total disponível em reais é x .

- A quarta parte foi destinada para o pagamento de um compromisso A. Logo:
 - $\frac{x}{4}$ foi destinado ao pagamento do compromisso A; e
 - Após o pagamento, **restou**:

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{4} &= \frac{4x - x}{4} \\ &= \frac{3x}{4} \end{aligned}$$



- Com a metade do que não foi utilizado para o compromisso A, pagou-se um compromisso B. Logo:
 - O valor destinado ao pagamento do compromisso B foi:

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3x}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3x}{4} \\ = \frac{3x}{8}$$

- Após o pagamento, restou a outra metade de $\frac{3x}{4}$, que corresponde a $\frac{3x}{8}$.

O enunciado nos diz que o valor restante corresponde a R\$ 187,50, e esse valor foi depositado em um investimento. Como o valor restante é $\frac{3x}{8}$, temos:

$$\frac{3x}{8} = 187,50 \\ x = \frac{187,5 \times 8}{3} \\ x = \text{R\$ } 500,00$$

A diferença entre o que foi investido e o que foi destinado para o pagamento do compromisso A é de:

$$187,5 - \frac{x}{4} = 187,5 - \frac{500}{4} \\ 187,5 - 125 \\ = \text{R\$ } 62,50$$

Gabarito: Letra B.

11.(VUNESP/ALESP/2022) Um trem do metrô está em movimento e em um dos vagões há 175 passageiros. Há assentos para $\frac{2}{7}$ desses passageiros e estão todos ocupados. Ao parar na estação seguinte, 23 pessoas desembarcam, sendo que, destas 23 pessoas, 12 estavam anteriormente sentadas. Outras 5 pessoas embarcaram e, quando o trem reiniciou sua viagem, havia apenas 3 assentos não ocupados. Nesse momento o número de pessoas que não ocupavam assentos é igual a

- a) 112.
- b) 125.



- c) 110.
- d) 115.
- e) 98.

Comentários:

No vagão de trem há 175 passageiros, havendo assentos para $\frac{2}{7}$ dos passageiros, todos ocupados. Logo:

- O número de **passageiros sentados** é $\frac{2}{7}$ **de** $175 = \frac{2}{7} \times 175 = 50$; e
- O número de **passageiros em pé** é $175 - 50 = 125$.

Ao parar na estação, 23 pessoas desembarcam, sendo que, destas 23 pessoas, 12 estavam anteriormente sentadas. Portanto, $23 - 12 = 11$ pessoas que desembarcaram estavam em pé. Logo:

- O número de **passageiros sentados** passou a ser $50 - 12 = 38$; e
- O número de **passageiros em pé** passou a ser $125 - 11 = 114$.

Outras 5 pessoas embarcaram e, quando o trem reiniciou sua viagem, havia apenas 3 assentos não ocupados. Isso significa que, além do embarque de 5 pessoas, houve um remanejamento entre os que estavam de pé e os que estavam sentados.

Note que, nesse momento, o total de passageiros passa a ser $38 + 114 + 5 = 157$. Como o total de assentos disponíveis é 50 e 3 assentos não estavam ocupados:

- O número de **passageiros sentados** passou a ser $50 - 3 = 47$; e
- O número de **passageiros em pé** passou a ser $157 - 47 = 110$.

Logo, o número de pessoas que não ocupavam assentos passou a ser 110.

Gabarito: Letra C.

12. (VUNESP/ALESP/2022) Em uma reunião para deliberar sobre um projeto e com x participantes, sabe-se, de entrada, que $\frac{3}{5}$ dos participantes disseram que eram contrários ao projeto. Dentre aqueles que não são contrários ao projeto, $\frac{1}{4}$ já são a favor e são 30 pessoas. Após a fala do autor do projeto, $\frac{3}{4}$ daqueles que eram inicialmente contrários mudaram de ideia e estão a favor. Metade daqueles que não eram contrários nem a favor, depois da fala do autor, ficaram a favor. Ninguém mais mudou de posição. A diferença entre aqueles que estão a favor e aqueles que não estão a favor é igual a



- a) 100.
- b) 110.
- c) 130.
- d) 140.
- e) 120.

Comentários:

Temos um **total de x participantes** na reunião.

Note que o problema apresenta duas situações: **uma situação anterior à fala do autor do projeto** e **uma situação posterior à fala do autor**.

Situação anterior à fala do autor

Na situação anterior à fala do autor do projeto, **$\frac{3}{5}$ dos participantes disseram que eram contrários ao projeto**. Logo:

- O **número de participantes contrários** é:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \text{ de } x &= \frac{3}{5} \times x \\ &= \frac{3x}{5}\end{aligned}$$

- O **número de participantes que não são contrários** é:

$$\begin{aligned}x - \frac{3x}{5} &= \frac{5x - 3x}{5} \\ &= \frac{2x}{5}\end{aligned}$$

Dentre aqueles que não são contrários ao projeto, **$\frac{1}{4}$ já são a favor**. Logo, o **número de participantes a favor** é:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \text{ de } \frac{2x}{5} &= \frac{1}{4} \times \frac{2x}{5} \\ &= \frac{x}{10}\end{aligned}$$



Note que o enunciado nos diz que o número de participantes a favor antes da fala do autor é 30. Logo:

$$\frac{x}{10} = 30$$

$$x = 30 \times 10$$

$$x = 300$$

Portanto, temos **300 participantes** na reunião. Consequentemente, antes da fala do autor:

- O número de participantes contrários é $\frac{3x}{5} = \frac{3 \times 300}{5} = 180$;
- O número de participantes a favor é 30; e
- O número de participantes que não são contrários nem a favor é $300 - 180 - 30 = 90$.

Vamos agora analisar a situação posterior à fala do autor do projeto.

Situação posterior à fala do autor

Após a fala do autor do projeto, $\frac{3}{4}$ daqueles que eram inicialmente contrários mudaram de ideia e estão a favor. Esses $\frac{3}{4}$ dos que eram inicialmente contrários correspondem a:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 180 = \frac{3}{4} \times 180$$

$$= 3 \times 45$$

$$= 135 \text{ pessoas}$$

Metade daqueles que não eram contrários nem a favor, depois da fala do autor, ficaram a favor. Trata-se de $\frac{90}{2} = 45$ pessoas que não eram contrários nem a favor e que passaram a ser a favor.

Considerando essas duas mudanças, temos que:

- O número de participantes contrários passa a ser $180 - 135 = 45$;
- O número de participantes a favor passa a ser $30 + 135 + 45 = 210$; e
- O número de participantes que não são contrários nem a favor passa a ser $90 - 45 = 45$.

A questão pergunta pela diferença entre aqueles que estão a favor e aqueles que não estão a favor.

Note que o total dos que não estão a favor corresponde aos participantes contrários somados aos participantes que não são contrários nem a favor: $45 + 45 = 90$.



Logo, a diferença entre aqueles que **estão a favor** e **aqueles que não estão a favor** é:

$$\begin{aligned} 210 - 90 \\ = 120 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

13.(VUNESP/AVAREPREV/2020) João gasta $\frac{3}{4}$ do seu salário em alimentação e aluguel e economiza $\frac{1}{3}$ do restante. A fração que indica o quanto João economiza do seu salário é

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{12}$
- d) $\frac{2}{12}$

Comentários:

Suponha que o **salário de João é S**.

O valor gasto com alimentação e aluguel é $\frac{3}{4}$ **de** $S = \frac{3}{4} \times S = \frac{3}{4}S$. O valor que resta após esse gasto é:

(Salário) – (Gasto com alimentação e aluguel)

$$\begin{aligned} S - \frac{3}{4}S \\ = \frac{4S - 3S}{4} \\ = \frac{1}{4}S \end{aligned}$$

Desse valor restante, João economiza $\frac{1}{3}$. Portanto, ele economiza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4}S \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S \\ = \frac{1}{12}S \end{aligned}$$

Gabarito: Letra C.



14. (VUNESP/CODEN/2021) Das pessoas de uma comunidade que participaram de uma pesquisa, apenas $\frac{3}{8}$ concluíram o ensino médio. Entre as pessoas que não concluíram o ensino médio, somente $\frac{1}{4}$ concluiu o ensino fundamental, o que corresponde a 180 pessoas. O número total de pessoas entrevistadas foi

- a) 750 pessoas.
- b) 875 pessoas.
- c) 1 152 pessoas.
- d) 1 248 pessoas.
- e) 1 450 pessoas.

Comentários:

Considere que o total de pessoas que participaram da entrevista seja T .

Temos, então, que $\frac{3}{8}T$ concluíram o ensino médio.

O total de pessoas que **não concluíram o ensino médio** é:

(Total dos entrevistados) – (Entrevistados que concluíram o ensino médio)

$$\begin{aligned} &= T - \frac{3}{8}T \\ &= \frac{8T - 3T}{8} \\ &= \frac{5}{8}T \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}$ das pessoas que **não concluíram o ensino médio** concluíram o ensino fundamental, e esse valor corresponde a 180 pessoas.

$$\frac{1}{4} \text{ de } (\text{pessoas que não concluíram o ensino médio}) = 180$$

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{8}T\right) = 180$$

$$\frac{5}{32}T = 180$$

$$T = 180 \times \frac{32}{5}$$



$$T = 1152$$

Logo, o número total de pessoas entrevistadas foi 1152.

Gabarito: Letra C.

15. (VUNESP/CODEN/2021) Um comércio tem 4 atendentes e, em determinado dia, foi realizada certa quantidade de vendas, das quais, Maria realizou um quinto dessa quantidade, Renato realizou um terço dessa quantidade, Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato, e Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas. O número de vendas realizadas por Renato foi

- a) 18.
- b) 15.
- c) 12.
- d) 9.
- e) 6.

Comentários:

Considere que a quantidade total de vendas feita pelos quatro atendentes seja T .

"Maria realizou um quinto dessa quantidade"

$$\frac{1}{5}T$$

"Renato realizou um terço dessa quantidade"

$$\frac{1}{3}T$$

"Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato"

Note que o total de vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato é dado por:

$$\text{Total} - (\text{Vendas da Maria}) - (\text{Vendas do Renato})$$

$$= T - \frac{1}{5}T - \frac{1}{3}T$$

$$= \frac{15T - 3T - 5T}{15}$$



$$= \frac{7}{15}T$$

Veja que Rosa realizou $\frac{1}{7}$ das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato. Logo, ela realizou:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \text{ de } \frac{7}{15}T \\ &= \frac{1}{7} \times \frac{7}{15}T \\ &= \frac{1}{15}T \end{aligned}$$

"Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas"

O restante das vendas corresponde a:

(Total) – (Vendas da Maria) – (Vendas do Renato) – (Vendas da Rosa)

$$\begin{aligned} & T - \frac{1}{5}T - \frac{1}{3}T - \frac{1}{15}T \\ &= \frac{15T - 3T - 5T - 1T}{15} \\ &= \frac{6}{15}T \end{aligned}$$

Esse restante de vendas corresponde a 18 vendas. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{6}{15}T &= 18 \\ T &= 18 \times \frac{15}{6} \\ T &= 3 \times 15 \\ T &= 45 \end{aligned}$$

A questão pergunta pelo número de vendas realizadas por Renato:

$$\frac{1}{3}T = \frac{1}{3} \times 45 = 15$$

Gabarito: Letra B.



16.(VUNESP/Pref. Cananéia/2020) Do número total de questões de uma prova de certo concurso, Isa acertou $\frac{5}{6}$ e Ana acertou $\frac{3}{5}$. Se Isa acertou 14 questões a mais que Ana, então o número de questões que Ana acertou é

- a) 50.
- b) 46.
- c) 40.
- d) 36.
- e) 30.

Comentários:

Considere que o total de questões da prova seja T .

Isa acertou $\frac{5}{6}$ **do** total de questões. Logo, ela acertou $\frac{5}{6}T$.

Ana acertou $\frac{3}{5}$ **do** total de questões. Logo, ela acertou $\frac{3}{5}T$.

Temos que Isa acertou 14 questões a mais do que Ana. Portanto:

$$(\text{Acertos da Isa}) - (\text{Acertos da Ana}) = 14$$

$$\frac{5}{6}T - \frac{3}{5}T = 14$$

$$\frac{25T - 18T}{30} = 14$$

$$\frac{7}{30}T = 14$$

$$T = 14 \times \frac{30}{7}$$

$$T = 2 \times 30$$

$$T = 60$$

O total de questões da prova é 60. O número de questões que Ana acertou é:

$$\frac{3}{5}T = \frac{3}{5} \times 60$$

$$= 3 \times 12$$

$$= 36$$

Gabarito: Letra D.



17. (VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) Para uma atividade recreativa, os alunos tinham que levar palitos de sorvete. Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos, sendo que o número de palitos levados por Ana era igual a $\frac{4}{5}$ do número de palitos levados por Bia. O número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi

- a) 8.
- b) 10.
- c) 12.
- d) 14.
- e) 16.

Comentários:

Considere que o número de palitos levados por Ana seja A e que o número de palitos levados por Bia seja B .

"Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos"

Logo, temos a seguinte relação entre A e B :

$$A + B = 108$$

"...o número de palitos levados por Ana era igual a $\frac{4}{5}$ do número de palitos levados por Bia."

Consequentemente, temos a seguinte relação entre A e B :

$$A = \frac{4}{5}B$$

Podemos substituir essa relação em $A + B = 108$:

$$A + B = 108$$

$$\frac{4}{5}B + B = 108$$

$$\frac{4B + 5B}{5} = 108$$

$$\frac{9}{5}B = 108$$

$$B = 108 \times \frac{5}{9}$$



$$B = 12 \times 5$$

$$B = 60$$

Como $A = \frac{4}{5}B$, temos:

$$A = \frac{4}{5}B$$

$$A = \frac{4}{5} \times 60$$

$$A = 4 \times 12$$

$$A = 48$$

Logo, o número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi:

$$B - A$$

$$= 60 - 48$$

$$= 12$$

Gabarito: Letra C.

18. (VUNESP/Pref. Cerquilha/2019) Em uma empresa, apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo. Além disso, da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo, o que corresponde a 40 funcionários. O número de funcionários que concluíram o ensino superior é igual a

- a) 10.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 20.
- e) 25.

Comentários:

Considere que o total de funcionários da empresa seja T .

"...apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo."



Logo, o número de funcionários que **não tem** ensino superior completo é:

(Total de funcionários) – (Funcionários com ensino superior)

$$T - \frac{1}{5} \text{ de } T$$

$$T - \frac{1}{5} \times T$$

$$T - \frac{T}{5}$$

$$= \frac{5T - T}{5}$$

$$= \frac{4}{5}T$$

"...da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo..."

Logo, o total de pessoas que não tem ensino médio completo é:

$$\frac{2}{3} \text{ da (parcela que não concluiu o ensino superior)}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}T$$

$$= \frac{8}{15}T$$

"...o que corresponde a 40 funcionários."

Temos que o total de pessoas que não tem ensino médio completo corresponde a 40 funcionários.

Logo:

$$\frac{8}{15}T = 40$$

$$T = 40 \times \frac{15}{8}$$

$$T = 5 \times 15$$

$$T = 75$$

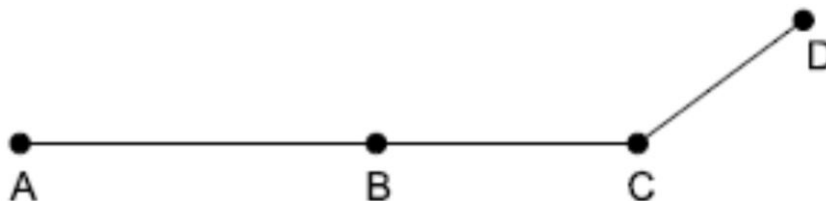
A questão pergunta pelo número de funcionários que concluíram o ensino superior, que é $\frac{1}{5}T$:



$$\frac{1}{5}T = \frac{1}{5} \times 75 = 15$$

Gabarito: Letra C.

19. (VUNESP/CM Orlândia/2019) Um motorista foi da cidade A até a cidade D, passando pelas cidades B e C, conforme o trajeto indicado na figura.



Sabe-se que, quando chegou à cidade B, ele já havia percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto total e que, quando chegou à cidade C, já havia percorrido $\frac{3}{4}$ do trajeto total. Se a distância entre as cidades B e C é de 35 km, então a distância total percorrida pelo motorista nesse trajeto foi de

- a) 90 km.
- b) 100 km.
- c) 110 km.
- d) 120 km.
- e) 140 km.

Comentários:

Considere que a distância total percorrida pelo motorista (da cidade A até a cidade D) seja **T**.

"..quando chegou à cidade B, ele já havia percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto total..."

Logo, a distância de A até B é $\frac{2}{5}T$.

"...quando chegou à cidade C, já havia percorrido $\frac{3}{4}$ do trajeto total."

Logo, a distância de A até C é $\frac{3}{4}T$.

"...a distância entre as cidades B e C é de 35 km.."

Note que a distância entre as cidades B e C é a distância de A até C menos a distância de A até B, e esse valor corresponde a 35 km.



$$(\text{Distância de A até C}) - (\text{Distância de A até B}) = 35$$

$$\frac{3}{4}T - \frac{2}{5}T = 35$$

$$\frac{15 - 8}{20}T = 35$$

$$\frac{7}{20}T = 35$$

$$T = 35 \times \frac{20}{7}$$

$$T = 5 \times 20$$

$$T = 100$$

Portanto, a **distância total percorrida pelo motorista** foi de **100 km**.

Gabarito: Letra B.



QUESTÕES COMENTADAS – VUNESP

Razão e proporção

1.(VUNESP/SP Trans/2024) No início de certo ano, um estacionamento oferece 120 vagas para aluguel mensal e 200 vagas no sistema rotativo (cobrança por hora). Após uma ampliação, esse estacionamento passou a oferecer mais 160 vagas, sendo parte de aluguel mensal e parte de vagas rotativas, de maneira que a razão entre o número total de vagas para aluguel mensal e o número total de vagas rotativas passou a ser $\frac{2}{3}$. O número de novas vagas rotativas na ampliação foi

- a) 56.
- b) 64.
- c) 72.
- d) 80.
- e) 88.

Comentários:

No início do ano, o estacionamento oferece:

- 120 vagas para aluguel mensal; e
- 200 vagas no sistema rotativo.

Considere que o número de **novas vagas rotativas** é x . Após a ampliação, o estacionamento passou a oferecer mais 160 vagas, das quais:

- $160 - x$ são novas vagas para aluguel mensal; e
- x são novas vagas rotativas.

Logo, o estacionamento passou a ter:

- $120 + (160 - x) = \mathbf{280 - x}$ **vagas para aluguel mensal**; e
- **$200 + x$ vagas no sistema rotativo.**

A razão entre o número total de vagas para aluguel mensal e o número total de vagas rotativas passou a ser $\frac{2}{3}$. Portanto:

$$\frac{280 - x}{200 + x} = \frac{2}{3}$$

$$3 \times (280 - x) = 2 \times (200 + x)$$

$$840 - 3x = 400 + 2x$$



$$840 - 400 = 2x + 3x$$

$$440 = 5x$$

$$5x = 440$$

$$x = \frac{440}{5}$$

$$x = 88$$

Logo, o número de novas vagas rotativas na ampliação foi 88.

Gabarito: Letra E.

2.(VUNESP/PM SP/2023) Com base nas informações que constam no site da Polícia Militar do Estado de São Paulo, pode-se concluir que, no mês de setembro de 2022, a cada hora, para cada pessoa presa em flagrante, 3 resgates foram efetuados. Se, no referido período de tempo, a soma do número de pessoas presas em flagrante com o número de resgates efetuados totalizou 36, então, o número de resgates foi igual a

- a) 27.
- b) 15.
- c) 9.
- d) 33.
- e) 21.

Comentários:

Suponha que o número de pessoas presas em flagrante é P e que o número de resgates efetuados é R .

Segundo o enunciado, para cada pessoa presa em flagrante, 3 resgates foram efetuados. Logo:

$$\frac{P}{R} = \frac{1}{3} \rightarrow P = \frac{1}{3}R$$

Além disso, a soma do número de pessoas presas em flagrante com o número de resgates efetuados totalizou 36. Logo:

$$P + R = 36$$

Substituindo $P = \frac{1}{3}R$ na equação anterior, temos:

$$\frac{1}{3}R + R = 36$$



$$\frac{R + 3R}{3} = 36$$

$$\frac{4R}{3} = 36$$

$$R = \frac{36 \times 3}{4}$$

$$R = 9 \times 3$$

$$R = 27$$

Logo, o número de resgates foi igual a 27.

Gabarito: Letra A.

3.(VUNESP/CAMPREV/2023) Sabe-se que a razão entre as medidas, em centímetros, do comprimento e da largura de um tampo de mesa retangular é de 7 para 3, e que a diferença entre essas medidas é igual a 120 cm. Nessas condições, é correto afirmar que a medida da largura desse tampo é igual a

- a) 70 cm.
- b) 75 cm.
- c) 80 cm.
- d) 85 cm.
- e) 90 cm.

Comentários:

Suponha que o **comprimento** em questão é C e a **largura** em questão é L .

Segundo o enunciado, a **razão entre o comprimento e a largura é de 7 para 3**. Logo:

$$\frac{C}{L} = \frac{7}{3} \rightarrow C = \frac{7}{3}L$$

Além disso, a **diferença entre as medidas é igual a 120cm**. Como a razão $\frac{C}{L}$ é maior do que 1, a medida C é maior do que a medida L . Logo, a diferença em questão é $C - L$:

$$C - L = 120$$

Substituindo $C = \frac{7}{3}L$ na equação anterior, temos:

$$\frac{7}{3}L - L = 120$$

$$\frac{7L - 3L}{3} = 120$$



$$\frac{4L}{3} = 120$$

$$L = \frac{120 \times 3}{4}$$

$$L = \frac{30 \times 3}{1}$$

$$L = 90 \text{ cm}$$

Logo, a medida da largura do tampo é igual a 90cm.

Gabarito: Letra E.

4.(VUNESP/Pref Jundiaí/2023) Em certo departamento, o número de colaboradores com cargo B supera o número de colaboradores com cargo A em 6 pessoas. Sabendo que a razão entre esses números, na ordem apresentada, é $\frac{3}{2}$, exercem esses cargos um total de colaboradores igual a

- a) 12.
- b) 18.
- c) 25.
- d) 30.
- e) 40.

Comentários:

Suponha que o número de colaboradores com o cargo B é b e que o número de colaboradores com o cargo A é a .

Segundo o enunciado, b supera a em 6 pessoas. Logo:

$$b - a = 6$$

Além disso, a razão entre b e a , nessa ordem, é $\frac{3}{2}$. Logo:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2}a$$

Substituindo $b = \frac{3}{2}a$ na primeira equação, temos:

$$\frac{3}{2}a - a = 6$$



$$\frac{3a - 2a}{2} = 6$$

$$\frac{a}{2} = 6$$

$$a = 2 \times 6$$

$$a = 12$$

Agora que temos o valor de a , podemos obter b :

$$b = \frac{3}{2}a$$

$$b = \frac{3}{2} \times 12$$

$$b = \frac{3}{1} \times 6$$

$$b = 18$$

A questão pergunta pelo **total de colaboradores que exercem os dois cargos**. Trata-se da soma $a + b$:

$$a + b = 12 + 18$$

$$= 30$$

Gabarito: Letra D.

5.(VUNESP/Pref SBC/2023) Segundo dados do IBGE (2021) referentes à educação no município de São Bernardo do Campo, a razão entre o número de matrículas no ensino médio e o número de matrículas no ensino fundamental foi igual a $\frac{15}{49}$.

Considerando que 128 000 alunos se matricularam nas escolas do município, no ano de 2021, então, o número de matriculados no ensino fundamental foi de

- a) 49 000.
- b) 68 200.
- c) 73 500.
- d) 88 200.
- e) 98 000.

Comentários:



Considere que o número de matriculados no ensino fundamental é F e que o número de matriculados no ensino médio é M .

Segundo o enunciado, a razão entre o número de matrículas no ensino médio e o número de matrículas no ensino fundamental foi igual a $\frac{15}{49}$. Logo:

$$\frac{M}{F} = \frac{15}{49} \rightarrow M = \frac{15}{49}F$$

Como 128.000 alunos se matricularam nas escolas do município, temos:

$$F + M = 128.000$$

Substituindo $M = \frac{15}{49}F$ na equação anterior, temos:

$$F + \frac{15}{49}F = 128.000$$

$$\frac{49F + 15F}{49} = 128.000$$

$$\frac{64F}{49} = 128.000$$

$$F = \frac{128.000 \times 49}{64}$$

$$F = \frac{2.000 \times 49}{1}$$

$$F = \frac{2.000 \times 49}{1}$$

$$F = 98.000$$

Logo, o número de matriculados no ensino fundamental foi de 98.000.

Gabarito: Letra E.

6. (VUNESP/TJ SP/2023) Em uma pesquisa realizada em 2019, com 200 pessoas, identificou-se que a razão entre o número de pessoas que não tinham filho ou filha e o número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) era 6/19. No ano passado, as mesmas pessoas participaram de outra pesquisa, ocasião em que foi identificado que o número de pessoas que não tinham filho ou filha havia diminuído em 12 unidades. Na pesquisa realizada no passado, a razão entre os números das pessoas que não tinham filho ou filha e das pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) foi:

a) 3/10.

b) 9/41.

c) 9/38.



d) $3/7$.

e) $12/41$.

Comentários:

Considere que:

- O número de pessoas que não tinham filho ou filha **em 2019** é N ; e
- O número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) **em 2019** é T .

O enunciado nos diz que, **em 2019**, a razão entre o número de pessoas que não tinham filho ou filha e o número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) era $6/19$. Logo:

$$\frac{N}{T} = \frac{6}{19} \rightarrow N = \frac{6}{19}T$$

O total de pessoas entrevistadas é 200. Logo:

$$N + T = 200$$

Substituindo $N = \frac{6}{19}T$ na equação anterior, temos:

$$\frac{6}{19}T + T = 200$$

$$\frac{6T + 19T}{19} = 200$$

$$\frac{25T}{19} = 200$$

$$T = \frac{200 \times 19}{25}$$

$$T = \frac{8 \times 19}{1}$$

$$T = 152$$

Agora que temos o valor de T , podemos obter também o valor de N :

$$N + T = 200$$

$$N = 200 - T$$

$$N = 200 - 152$$

$$N = 48$$



Logo:

- O número de pessoas que não tinham filho ou filha em 2019 é $N = 48$; e
- O número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) em 2019 é $T = 152$.

No ano passado, as mesmas 200 pessoas participaram de outra pesquisa, e o número de pessoas que não tinham filho ou filha havia diminuído em 12 unidades. Uma consequência disso é que o número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) aumentou em 12 unidades. Portanto:

- O número de pessoas que não tinham filho ou filha no ano passado é $48 - 12 = 36$; e
- O número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) no ano passado é $152 + 12 = 164$.

Logo, na pesquisa realizada no passado, a razão entre os números das pessoas que não tinham filho ou filha e das pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) foi:

$$\frac{36}{164} = \frac{18}{82}$$
$$= \frac{9}{41}$$

Gabarito: B.

7.(VUNESP/DPE SP/2023) Em um hospital, 105 funcionários são médicos ou enfermeiros. São 2 médicos para cada 13 enfermeiros. A contratação de 3 médicos e de 11 enfermeiros fez com que a razão de médicos para enfermeiros se tornasse

- a) 2/9
- b) 3/11
- c) 1/17
- d) 5/19
- e) 1/6

Comentários:

Suponha que o número de médicos original é M e o número de enfermeiros original é E .

Segundo o enunciado, são 2 médicos para cada 13 enfermeiros. Logo:

$$\frac{M}{E} = \frac{2}{13} \rightarrow M = \frac{2}{13}E$$

Além disso, o total de funcionários é 105. Portanto:

$$M + E = 105$$



Substituindo $M = \frac{2}{13}E$ na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{13}E + E &= 105 \\ \frac{2E + 13E}{13} &= 105 \\ \frac{15E}{13} &= 105 \\ E &= \frac{105 \times 13}{15} \\ E &= \frac{7 \times 13}{1} \\ E &= 91\end{aligned}$$

Agora que temos o valor de E , podemos obter o valor de M .

$$\begin{aligned}M + E &= 105 \\ M + 91 &= 105 \\ M &= 105 - 91 \\ M &= 14\end{aligned}$$

Após a contratação de 3 médicos e de 11 enfermeiros, passamos a ter:

- $14 + 3 = 17$ médicos; e
- $91 + 11 = 102$ enfermeiros.

Logo, a razão de médicos para enfermeiros passou a ser:

$$\frac{17}{102} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra E.

8. (VUNESP/UNICAMP/2023) Em certo laboratório, para cada 4 computadores com mais de 1 ano de utilização, existem 7 computadores com 1 ano ou menos de utilização. Se, ao todo, há 44 computadores nesse laboratório, e serão comprados alguns computadores novos para que a razão entre o número de computadores com mais de 1 ano de utilização e o número de computadores com 1 ano ou menos de utilização seja de 1 para 2, então o número de novos computadores que serão comprados é igual a

- a) 3.
b) 4.



- c) 5.
- d) 6.
- e) 7.

Comentários:

Suponha que:

- O número original de computadores com mais de 1 ano de utilização (**computadores velhos**) é **V**; e
- O número original de computadores com 1 ano ou menos de utilização (**computadores novos**) é **N**.

Para cada 4 computadores velhos, existem 7 computadores novos. Logo:

$$\frac{V}{N} = \frac{4}{7} \rightarrow V = \frac{4}{7}N$$

Além disso, ao todo, há 44 computadores. Portanto:

$$V + N = 44$$

Substituindo $V = \frac{4}{7}N$ na equação anterior, temos:

$$\frac{4}{7}N + N = 44$$

$$\frac{4N + 7N}{7} = 44$$

$$\frac{11N}{7} = 44$$

$$N = \frac{44 \times 7}{11}$$

$$N = \frac{4 \times 7}{1}$$

$$N = 28$$

Agora que temos o valor de N , podemos obter o valor de V :

$$V + N = 44$$

$$V + 28 = 44$$

$$V = 44 - 28$$

$$V = 16$$



Considere que o **número de computadores novos comprados será x** .

Segundo o problema, serão comprados x computadores novos para que a razão entre computadores velhos e computadores novos seja 1 para 2. Note que, após a compra, teremos:

- **16** computadores velhos; e
- **$28 + x$** computadores novos.

Logo:

$$\frac{16}{28 + x} = \frac{1}{2}$$

Realizando a **multiplicação cruzada**, temos:

$$28 + x = 2 \times 16$$

$$28 + x = 32$$

$$x = 32 - 28$$

$$x = 4$$

Logo, o **número de novos computadores que serão comprados é igual a 4**.

Gabarito: Letra B.

9. (VUNESP/Pref Sorocaba/2023) Em uma empresa, no início de 2021, a razão entre o número de funcionários que faziam compras com dinheiro em cédulas e o número de funcionários que só compravam com cartões era $3/2$. No fim de 2021, 54 funcionários passaram a só fazer compras com cartões e, dessa maneira, a razão indicada passou a ser $18/17$. Considerando que em 2021 não houve mudanças no quadro de funcionários, o total dessas pessoas que ainda faziam compras com dinheiro em cédulas no fim de 2021 era

- a) 234.
- b) 243.
- c) 324.
- d) 342.
- e) 423.

Comentários:

Suponha que, **no início de 2021**, o número de funcionários que faziam compras com dinheiro em cédulas é **D** e que o número de funcionários que só compravam com cartões é **C** .



Segundo o enunciado, a razão entre D e C é $3/2$. Logo:

$$\frac{D}{C} = \frac{3}{2} \rightarrow 3C = 2D \rightarrow C = \frac{2}{3}D$$

No fim de 2021, 54 funcionários passaram a só fazer compra com cartões. Como não houve mudanças no quadro de funcionários, note que:

- O número de funcionários que passaram a fazer compras com dinheiro em cédulas passou a ser $D - 54$
- O número de funcionários que passaram a comprar somente com cartões passou a ser $C + 54$.

Segundo o enunciado, a nova razão passou a ser $18/17$. Logo:

$$\frac{D - 54}{C + 54} = \frac{18}{17}$$

Realizando a multiplicação cruzada, temos:

$$17 \times (D - 54) = 18 \times (C + 54)$$

$$17D - 918 = 18C + 972$$

Substituindo $C = \frac{2}{3}D$ na equação anterior, temos:

$$17D - 918 = 18 \times \left(\frac{2}{3}D\right) + 972$$

$$17D - 918 = 6 \times \left(\frac{2}{1}D\right) + 972$$

$$17D - 918 = 12D + 972$$

$$17D - 12D = 972 + 918$$

$$5D = 1890$$

$$D = \frac{1890}{5}$$

$$D = 378$$

Queremos obter o total de pessoas que ainda faziam compras com dinheiro em cédulas **no fim de 2021**:

$$D - 54 = 378 - 54$$

$$= 324$$

Gabarito: Letra C.



10. (VUNESP/Pref. Peruíbe/2023) Em uma empresa com um total de 77 funcionários, a razão entre o número de funcionárias e o total de funcionários é $\frac{6}{11}$.

Se forem contratadas outras 14 funcionárias, a razão entre o número de funcionárias e o total de funcionários passará a ser:

- a) $\frac{7}{12}$
- b) $\frac{8}{13}$
- c) $\frac{9}{14}$
- d) $\frac{10}{15}$
- e) $\frac{11}{16}$

Comentários:

Segundo o enunciado, o total de funcionários (**homens e mulheres**) é 77. Suponha que o número original de funcionárias (**mulheres**) é M .

Inicialmente, razão entre o número de funcionárias (**mulheres**) e o total de funcionários (**homens e mulheres**) é $\frac{6}{11}$. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{M}{77} &= \frac{6}{11} \\ M &= \frac{6 \times 77}{11} \\ M &= \frac{6 \times 7}{1} \\ M &= 42\end{aligned}$$

Após serem contratadas outras 14 funcionárias:

- O total de funcionárias (**mulheres**) passa a ser $42+14 = 56$;
- O total de funcionários (**homens e mulheres**) passa a ser $77+14 = 91$.

Logo, a razão entre o número de funcionárias e o total de funcionários passará a ser:

$$\frac{56}{91}$$

Simplificando o numerador e o denominador por 7, temos:

$$\frac{8}{13}$$

Gabarito: Letra B.



11.(VUNESP/CMSJC/2022) Os parafusos dos pedidos A e B, de quantidades iguais, foram totalmente distribuídos em pacotes. A razão entre o número de parafusos colocados em cada pacote do pedido A e em cada pacote do pedido B é igual a $\frac{2}{3}$.

Sabendo-se que em cada pacote do pedido A, foram colocados 48 parafusos, sendo necessários 30 pacotes, conclui-se que, para o pedido B, o número de pacotes necessários foi igual a

- a) 18.
- b) 20.
- c) 22.
- d) 24.
- e) 26.

Comentários:

Sabemos que em cada pacote do pedido A foram colocados **48 parafusos**. Suponha que em cada pacote do pedido B foram colocados **b parafusos**.

A razão entre o número de parafusos colocados em cada pacote do pedido A e em cada pacote do pedido B é igual a $\frac{2}{3}$. Logo:

$$\frac{48}{b} = \frac{2}{3}$$

Realizando a multiplicação cruzada, temos:

$$2b = 3 \times 48$$

$$b = \frac{3 \times 48}{2}$$

$$b = \frac{3 \times 24}{1}$$

$$b = 72$$

Portanto, em cada pacote do pedido B foram colocados **72 parafusos**.

No **pedido A**, temos **30 pacotes** e **48 parafusos por pacote**. Logo, o **total de parafusos do pedido A** é:

$$30 \times 48 = 1440$$

Como o **número de parafusos total dos pedidos A e B são iguais**, temos também **1440 parafusos para o pedido B**. Como em cada pacote do pedido B foram colocados **72 parafusos**, o total de pacotes necessários para o pedido B é:



$$\frac{1440}{72} = 20 \text{ pacotes}$$

Gabarito: Letra D.

12. (VUNESP/ALESP/2022) Em uma empresa com 420 funcionários, a razão entre funcionários homens e funcionárias é 1,4. A empresa dispensará 20 funcionários homens e contratará funcionárias, de modo que a razão entre funcionários homens e funcionárias seja igual a 1. Isto feito, o número total de funcionários da empresa aumentará em

- a) 40.
- b) 30.
- c) 20.
- d) 50.
- e) 60.

Comentários:

Suponha que originalmente temos **H** funcionários homens e **M** funcionárias.

Inicialmente, a razão entre funcionários homens e funcionárias é 1,4. Logo:

$$\frac{H}{M} = 1,4 \rightarrow H = 1,4M$$

Além disso, a empresa tem originalmente 420 funcionários. Logo:

$$H + M = 420$$

Substituindo **$H = 1,4M$** na equação anterior, temos:

$$1,4M + M = 420$$

$$2,4M = 420$$

$$M = \frac{420}{2,4}$$

$$M = 175$$

Agora que temos o valor de M , podemos obter o valor de H :

$$H = 1,4M$$

$$H = 1,4 \times 175$$



$$H = 245$$

A empresa dispensará 20 funcionários homens e contratará funcionárias. Suponha que o número de funcionárias contratadas é x . Nesse caso, teremos:

- $245 - 20 = 225$ funcionários homens; e
- $175 + x$ funcionárias.

Para que a razão entre funcionários homens e funcionárias seja igual a 1, devemos ter:

$$\frac{225}{175 + x} = 1$$

$$225 = 175 + x$$

$$x = 225 - 175$$

$$x = 50$$

Portanto, o número de funcionárias contratadas deverá ser 50.

A questão pergunta pelo aumento do total de funcionários da empresa. Como 50 funcionárias foram contratadas e 20 funcionários homens foram dispensados, o aumento do total de funcionários será:

$$50 - 20 = 30$$

Gabarito: Letra B.

13.(VUNESP/CODEN/2021) Em certa empresa, os funcionários têm, pelo menos, o ensino médio completo e sabe-se que, para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo. Se nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários, então a diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a

- a) 80.
- b) 88.
- c) 96.
- d) 104.
- e) 112.

Comentários:

Considere que temos S funcionários com o ensino superior completo e M funcionários com somente o ensino médio completo.



"...para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo..."

Logo, temos a seguinte razão:

$$\frac{S}{M} = \frac{1}{4}$$

"...nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários..."

Portanto, temos:

$$S + M = 160$$

Com base nas duas equações que obtemos, é possível obter os valores de S e de M .

Realizando a **multiplicação cruzada** na primeira equação, temos:

$$\frac{S}{M} = \frac{1}{4}$$

$$4S = 1M$$

$$M = 4S$$

Substituindo M por $4S$ na segunda equação, temos:

$$S + M = 160$$

$$S + 4S = 160$$

$$5S = 160$$

$$S = 32$$

Como $M = 4S$, temos:

$$M = 4 \times 32$$

$$M = 128$$

A diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a:

$$M - S = 128 - 32$$

$$= 96$$

Gabarito: Letra C.



14. (VUNESP/FITO/2020) Em um grupo de amigos, o número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Sabendo-se que a razão entre os números de não casados e casados é $\frac{3}{4}$, o número de pessoas nesse grupo é igual a

- a) 14.
- b) 21.
- c) 28.
- d) 35.
- e) 42.

Comentários:

Considere que o número de casados é C e o número de não casados é N .

O número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Logo:

$$C = N + 3$$

A razão entre os números de não casados e casados é $\frac{3}{4}$. Logo:

$$\frac{N}{C} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{N}{N + 3} = \frac{3}{4}$$

Realizando a **multiplicação cruzada**, temos:

$$4N = 3 \times (N + 3)$$

$$4N = 3N + 9$$

$$4N - 3N = 9$$

$$N = 9$$

O número de casados é:

$$C = N + 3$$

$$= 9 + 3$$

$$= 12$$

Portanto, o número de pessoas desse grupo é:

$$C + N = 12 + 9 = 21$$

Gabarito: Letra B.



15. (VUNESP/FITO/2020) Sobre os 1 430 candidatos que prestaram a última fase de um concurso, sabe-se que a razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é $\frac{4}{7}$. O número de candidatos aprovados nessa fase do concurso é

- a) 520.
- b) 530.
- c) 540.
- d) 550.
- e) 560.

Comentários:

Seja A o número de **aprovados** e N o número de **não aprovados**.

O total de candidatos é 1.430. Logo:

$$A + N = 1.430$$

A razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é $4/7$. Logo:

$$\frac{A}{N} = \frac{4}{7}$$

Podemos escrever N em função de A . Ao realizar a **multiplicação cruzada**, temos:

$$7A = 4N$$

$$N = \frac{7}{4}A$$

Substituindo o valor de N em $A + N = 1.430$, temos:

$$A + \frac{7}{4}A = 1.430$$

$$\frac{4 + 7}{4}A = 1.430$$

$$\frac{11}{4}A = 1.430$$

$$A = 4 \times \frac{1.430}{11}$$

$$A = 520$$

Gabarito: Letra A.



16. (VUNESP/FITO/2020) Para a fabricação de um produto líquido, utiliza-se uma matéria prima que é comprada ao preço de R\$ 15,00 o litro, e sabe-se que, com 10 litros dessa matéria prima, são fabricados 70 litros desse produto, que é vendido a R\$ 5,00, o litro. Certo dia, o valor obtido com a venda desse produto foi de R\$ 1.120,00. Logo, o valor gasto com a matéria prima correspondente à fabricação da quantidade de litros vendidos, nesse dia, foi de

- a) R\$ 435,00.
- b) R\$ 450,00.
- c) R\$ 465,00.
- d) R\$ 480,00.
- e) R\$ 495,00.

Comentários:

Como o produto final é vendido a **R\$ 5,00 por litro** e o **valor total da venda** foi de **R\$ 1.120,00**, então o volume total do produto vendido é:

$$\frac{1.120 \text{ reais}}{5 \text{ reais por litro}} = 224 \text{ litros}$$

"...sabe-se que, com 10 litros dessa matéria prima, são fabricados 70 litros desse produto..."

Se foram utilizados M litros da matéria prima, então temos a seguinte proporção:

$$\frac{\text{Volume de matéria prima}}{\text{Volume total do produto}} = \frac{10}{70}$$

$$\frac{M}{224} = \frac{10}{70}$$

Portanto, o volume de matéria prima utilizado é:

$$M = \frac{10}{70} \times 224$$

$$M = 32 \text{ litros}$$

Como a matéria prima foi comprada ao preço de R\$ 15,00 o litro, o valor gasto com a matéria prima é:

$$32 \text{ litros} \times 15 \text{ reais por litro} = \mathbf{480 \text{ reais}}$$

Gabarito: Letra D.



17.(VUNESP/Pref Olímpia/2019) Em um determinado posto de atendimento ao público, há 2 filas de espera, uma para atendimento preferencial e outra para atendimento não preferencial. Na fila para atendimento não preferencial, há 45 pessoas. Sabendo que a razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial e o número de pessoas na fila para atendimento não preferencial é $\frac{2}{5}$, então o número de pessoas na fila para atendimento preferencial é

- a) 16.
- b) 18.
- c) 20.
- d) 22.
- e) 24.

Comentários:

Sabemos que há **45 pessoas** na fila para atendimento não preferencial.

Considere que temos **P pessoas** na fila para atendimento preferencial.

A razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial (**P**) e o número de pessoas na fila para atendimento não preferencial (**45**) é $\frac{2}{5}$. Logo:

$$\frac{P}{45} = \frac{2}{5}$$

$$P = 45 \times \frac{2}{5}$$

$$P = 9 \times 2$$

$$P = 18$$

Gabarito: Letra B.

18. (VUNESP/Pref. SJC/2019) Em abril de 2019, foi publicada a seguinte notícia em alguns jornais eletrônicos:

Dois em cada três hotéis vazam dados pessoais de hóspedes.

Considerando-se verdadeira essa informação, é correto afirmar que

- a) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é o dobro do número de hotéis que não vazam esses dados.
- b) a razão entre o número de hotéis que não vazam dados pessoais de hóspedes e o número de hotéis que vazam esses dados é $\frac{1}{3}$.



- c) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é $\frac{2}{3}$ do número de hotéis que não vazam esses dados.
- d) a razão entre o número de hotéis que não vazam dados pessoais de hóspedes e o número total de hotéis é $\frac{3}{5}$.
- e) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é $\frac{3}{4}$ do número de hotéis que não vazam esses dados.

Comentários:

Considere que V hotéis **vazam** dados pessoais de hóspedes e N hotéis **não vazam**.

Observe que a totalidade de hotéis corresponde à soma dos que vazam e dos que não vazam ($V + N$).

Ao dizer que "**dois em cada três hotéis vazam dados pessoais de hóspedes**", isso significa que a razão entre os hotéis que vazam dados (V) e a totalidade de hotéis ($V + N$) é $\frac{2}{3}$:

$$\frac{V}{V + N} = \frac{2}{3}$$

Ao realizar a **multiplicação cruzada**, encontramos uma relação entre V e N :

$$3V = 2 \times (V + N)$$

$$3V = 2V + 2N$$

$$3V - 2V = 2N$$

$$V = 2N$$

A igualdade acima nos diz que o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes (V) **é o dobro** do número de hotéis que não vazam esses dados (N).

Gabarito: Letra A.

19. (VUNESP/CM Nova Odessa/2018) Em um concurso público, estavam sendo avaliados somente candidatos para os cargos A ou B. Nesse concurso, cada candidato poderia fazer inscrição para apenas um desses cargos, e sabe-se que a razão entre os números de candidatos inscritos aos cargos A e B, nessa ordem, é igual a 0,2. Sendo assim, o número de candidatos inscritos ao cargo B corresponde, do número total de candidatos inscritos, a

- a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{5}{6}$



d) $7/8$

e) $8/9$

Comentários:

Considere que os números de candidatos inscritos aos cargos A e B são, respectivamente, a e b . Observe que o total de candidatos é dado por $(a + b)$.

"...a razão entre os números de candidatos inscritos aos cargos A e B, nessa ordem, é igual a 0,2..."

Logo, temos:

$$\frac{a}{b} = 0,2$$

$$a = 0,2b$$

A questão pede uma relação entre o número de candidatos inscritos ao cargo B (b) e o total de candidatos ($a + b$).

A **razão** entre o número de candidatos inscritos ao cargo B (b) e o total de candidatos ($a + b$) é:

$$\frac{\text{Número de candidatos inscritos ao cargo B}}{\text{Total de candidatos}} = \frac{b}{a + b} = \frac{b}{0,2b + b} = \frac{b}{1,2b} = \frac{1}{1,2} = \frac{1}{\frac{12}{10}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Logo:

$$\text{Número de candidatos inscritos ao cargo B} = \frac{5}{6} \times (\text{Total de inscritos})$$

Portanto, o número de candidatos inscritos ao cargo B corresponde, do número total de candidatos inscritos, a $5/6$.

Gabarito: Letra C.

20. (VUNESP/PAULIPREV/2018) Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

a) 12 e 13 anos.

b) 13 e 14 anos.

c) 14 e 15 anos.

d) 15 e 16 anos.

e) 16 e 17 anos.



Comentários:

Considere que a idade da filha Marisa é f . A razão entre as idades do pai e do filho é:

$$\frac{48}{18}$$

A razão entre as idades da mãe e da filha é:

$$\frac{42}{f}$$

Como as razões são proporcionais, temos a igualdade entre as razões:

$$\frac{48}{18} = \frac{42}{f}$$

Ao realizar a **multiplicação cruzada**, temos:

$$48f = 42 \times 18$$

$$f = \frac{42 \times 18}{48}$$

Ao simplificar 18 e 48 por 6, temos:

$$f = \frac{42 \times 3}{8}$$

Ao simplificar 42 e 8 por 2, temos:

$$f = \frac{21 \times 3}{4}$$

$$f = \frac{63}{4}$$

$$f = 15,75$$

Logo, a idade de Marisa está entre 15 e 16 anos.

Gabarito: Letra D.



21. (VUNESP/TJ SP/2015) Uma verba total de R\$ 1,5 milhão foi aplicada na realização de dois projetos, A e B. Sabendo-se que a razão entre a parte aplicada no projeto A e a parte aplicada no projeto B, nessa ordem, pode ser representada pelo número 1,4, é correto afirmar que no projeto B, quando comparado ao projeto A, foram aplicados

- a) R\$ 600 mil a mais.
- b) R\$ 250 mil a menos.
- c) R\$ 600 mil a menos.
- d) R\$ 425 mil a menos.
- e) R\$ 250 mil a mais.

Comentários:

Suponha que o valor aplicado nos projetos A e B sejam, respectivamente, a e b .

A verba total é de R\$ 1,5 milhão. Logo:

$$a + b = \text{R\$ } 1,5 \text{ milhão}$$

A razão entre a parte aplicada no projeto A e a parte aplicada no projeto B é 1,4. Logo:

$$\frac{a}{b} = 1,4$$

$$a = 1,4b$$

Substituindo essa relação na soma $a + b = \text{R\$ } 1,5 \text{ milhão}$, temos:

$$a + b = \text{R\$ } 1,5 \text{ milhão}$$

$$1,4b + b = 1.500.000$$

$$2,4b = 1.500.000$$

$$b = \frac{1.500.000}{2,4}$$

$$b = 625.000$$

Logo, o valor aplicado no projeto A é:

$$a = 1,4b$$

$$a = 1,4 \times 625.000$$

$$a = 875.000$$



Observe que no projeto B foi aplicado um valor menor. Esse valor a menos corresponde a:

$$\begin{aligned} &875.000 - 625.000 \\ &= R\$ 250.000 \end{aligned}$$

Portanto, no projeto B, quando comparado ao projeto A, foram aplicados **R\$ 250 mil a menos**.

Gabarito: Letra B.

22.(VUNESP/TJ SP/2013) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, $\frac{2}{5}$ dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que $\frac{1}{4}$ dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, nessa escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e o número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de

- a) 2:3.
- b) 1:3.
- c) 1:6.
- d) 3:4.
- e) 2:5.

Comentários:

Considere que a escola apresenta um total de T alunos.

"...2/5 dos alunos de certa escola chegaram atrasados..."

Com essa informação, temos:

- Alunos atrasados: $\frac{2}{5}T$
- Alunos que chegaram no horário: $T - \frac{2}{5}T = \frac{5T-2T}{5} = \frac{3}{5}T$

"...1/4 dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso..."

Logo, o total de atrasados com mais de 30 minutos de atraso é:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \text{ dos (alunos atrasados)} \\ &= \frac{1}{4} \text{ de } \frac{2}{5}T \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} T$$
$$= \frac{1}{10} T$$

Portanto, razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e o número de alunos que chegaram no horário é:

$$\frac{\text{Alunos com mais de 30 min atraso}}{\text{Alunos que chegaram no horário}}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} T}{\frac{3}{5} T} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: Letra C.

23.(VUNESP/TJ SP/2009) Uma dívida será paga em 20 parcelas mensais fixas e iguais, sendo que, hoje, o valor de cada parcela representa $\frac{1}{4}$ do salário líquido mensal do devedor. Hoje, o salário líquido mensal do devedor representa, do valor total da dívida,

- a) $\frac{1}{10}$.
- b) $\frac{1}{9}$.
- c) $\frac{1}{8}$.
- d) $\frac{1}{7}$.
- e) $\frac{1}{5}$.

Comentários:

Considere que o salário líquido mensal do devedor seja S .

Cada parcela representa $\frac{1}{4}$ do salário líquido mensal do devedor: $\frac{1}{4}S$.

A dívida é composta por 20 parcelas. Logo, o valor total da dívida é:

$$20 \times \frac{1}{4} S$$
$$= 5S$$

Portanto:

$$\frac{\text{Salário líquido}}{\text{Total da dívida}} = \frac{S}{5S} = \frac{1}{5}$$



Logo, o salário líquido mensal do devedor representa **1/5 do valor total da dívida**.

Gabarito: Letra E.

24. (VUNESP/TJ SP/2009) No tanque completamente vazio de um carro bicomcombustível, foram colocados 9 litros de gasolina e 15 litros de álcool. Num segundo momento, sem que o carro tivesse saído do posto, foram colocados mais alguns litros de álcool, e a razão entre o número de litros de álcool e o número de litros de gasolina contidos no tanque passou a ser de 3 para 1. O número de litros de álcool colocados nesse segundo momento foi

- a) 8.
- b) 9.
- c) 12.
- d) 15.
- e) 16.

Comentários:

Considere que foram colocados A litros de álcool no segundo momento.

- Inicialmente, temos **9** litros de gasolina e **15** litros de álcool.
- No segundo momento, ao adicionar A litros de álcool, temos **9** litros de gasolina e **(15 + A)** litros de álcool.

Com essa adição de álcool, a **razão** entre o número de **litros de álcool** e o número de **litros de gasolina** contidos no tanque passou a ser de **3 para 1**. Portanto:

$$\frac{\text{litros de álcool}}{\text{litros de gasolina}} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{15 + A}{9} = \frac{3}{1}$$

Ao realizar a **multiplicação cruzada**, temos:

$$(15 + A) \times 1 = 3 \times 9$$

$$15 + A = 27$$

$$A = 27 - 15$$

$$A = 12 \text{ litros}$$

Portanto, foram colocados 12 litros de álcool no segundo momento.

Gabarito: Letra C.



QUESTÕES COMENTADAS – VUNESP

Proporcionalidade

1.(VUNESP/Pref Pindamonhangaba/2023) Uma verba de R\$ 200 mil será destinada para a compra de novos computadores, de modo a substituir os computadores mais antigos em duas secretarias municipais de certa cidade. Sabendo-se que a verba será dividida proporcionalmente, de acordo com a quantidade de computadores com mais de 5 anos de uso nessas duas secretarias, e que em uma dessas secretarias há 14 máquinas, enquanto que na outra há 11 máquinas com mais de 5 anos de uso, a diferença entre os valores que serão destinados para ambas as secretarias será de

- a) R\$ 22 mil.
- b) R\$ 24 mil.
- c) R\$ 26 mil.
- d) R\$ 28 mil.
- e) R\$ 30 mil.

Comentários:

Devemos **dividir R\$ 200 mil** em partes **diretamente proporcionais** às quantidades de computadores com mais de 5 anos de uso: **14** e **11**.

Suponha que a **secretaria que tem 14 computadores antigos receberá a quantia a** , e que a **secretaria que tem 11 computadores antigos receberá a quantia b** . Nesse caso:

$$\frac{a}{14} = \frac{b}{11} = k$$

A soma das quantias totaliza **R\$ 200 mil**. Logo, $a + b = 200.000$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{14} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{14+11}$$

$$\frac{a}{14} = \frac{b}{11} = \frac{200.000}{25}$$

$$\frac{a}{14} = \frac{b}{11} = 8.000$$

Logo:

$$\frac{a}{14} = 8.000 \rightarrow a = 14 \times 8.000 \rightarrow a = \mathbf{112.000}$$



$$\frac{b}{11} = 8.000 \rightarrow b = 11 \times 8.000 \rightarrow b = 88.000$$

Portanto, a diferença entre os valores que serão destinados para ambas as secretarias será de:

$$\begin{aligned} a - b &= 112.000 - 88.000 \\ &= \text{R\$ } 24.000 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

2. (VUNESP/CAMPREV/2023) Aberta com vazão constante, uma torneira despejou um total de 520 litros de água em dois reservatórios, A e B, inicialmente vazios, sendo essa quantidade repartida entre eles em partes diretamente proporcionais aos tempos necessários para preenchê-los completamente, que foram iguais a 40 minutos e 1 hora e 4 minutos, respectivamente. Nessas condições, é correto afirmar que a diferença entre as quantidades recebidas pelos reservatórios B e A foi igual a

- a) 100 litros.
- b) 120 litros.
- c) 140 litros.
- d) 150 litros.
- e) 160 litros.

Comentários:

Sabemos que **1h = 60min**. Consequentemente, o tempo de **1h 04min** corresponde a **60+4 = 64min**.

Note, então, que os tempos necessários para preencher completamente os reservatórios A e B são, respectivamente, **40min** e **64min**.

Devemos **dividir 520 litros de água** entre os reservatórios A e B em partes **diretamente proporcionais** aos tempos necessários para preenchê-los: **40min** e **64min**.

Suponha que o **reservatório A** receberá uma quantidade **a** de litros e que o **reservatório B** receberá uma quantidade **b** de litros. Nesse caso:

$$\frac{a}{40} = \frac{b}{64} = k$$

A soma das quantidades totaliza **520 litros**. Logo, $a + b = 520$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{40} = \frac{b}{64} = \frac{a + b}{40 + 64}$$



$$\frac{a}{40} = \frac{b}{64} = \frac{520}{104}$$

$$\frac{a}{40} = \frac{b}{64} = 5$$

Logo:

$$\frac{a}{40} = 5 \rightarrow a = 40 \times 5 \rightarrow a = 200$$

$$\frac{b}{64} = 5 \rightarrow b = 64 \times 5 \rightarrow b = 320$$

Portanto, a diferença entre as quantidades recebidas pelos reservatórios B e A foi igual a:

$$\begin{aligned} b - a &= 320 - 200 \\ &= 120 \text{ litros} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

3.(VUNESP/TCM SP/2023) Dividiu-se um prêmio de R\$ 750 mil entre duas filiais de uma empresa, de forma diretamente proporcional às vendas efetuadas por elas, no ano anterior. Para tanto, identificou-se que, no ano anterior, uma das filiais vendeu o valor de R\$ 3,6 milhões, e a outra, R\$ 5,4 milhões. Ocorre que, após uma conferência das informações, identificou-se que houve um lançamento de vendas invertido, em determinado mês, o que gerou um lançamento indevido de R\$ 0,45 milhão a mais na filial que mais vendeu.

Sendo assim, a filial que mais vendeu deverá repassar, para a outra filial, o valor de

- a) R\$ 2.250,00.
- b) R\$ 37.500,00.
- c) R\$ 83.250,00.
- d) R\$ 112.500,00.
- e) R\$ 150.000,00.

Comentários:

Ao invés de realizar duas divisões em partes diretamente proporcionais para as situações **anterior** e **posterior** à correção do lançamento invertido, **podemos resolver a questão de uma maneira mais simples.**

Note que o total das vendas foi **3,6 + 5,4 = 9 milhões de reais.**

Como o lançamento indevido nas vendas foi de **0,45 milhão**, **o lançamento indevido corresponde a:**



$$\frac{0,45}{9} = \frac{0,05}{1} = \frac{5}{100} \text{ do total de vendas}$$

Portanto, $\frac{5}{100}$ das vendas foram lançadas indevidamente.

Como o prêmio de R\$ 750.000,00 foi distribuído em partes **diretamente proporcionais** às vendas, **o valor do prêmio distribuído indevidamente foi:**

$$\begin{aligned} & \frac{5}{100} \text{ de } 750.000 \\ &= \frac{5}{100} \times 750.000 \\ &= \frac{5}{1} \times 7.500 \\ &= \text{R\$ } 37.500 \end{aligned}$$

Logo, **a filial que mais vendeu deverá repassar, para a outra filial, o valor de R\$ 37.500,00.** O gabarito, portanto, é **letra B**.

A questão também pode ser resolvida de uma maneira mais demorada, seguindo-se os seguintes passos:

- Obter a **distribuição do prêmio antes da correção** do lançamento das vendas;
- Obter a **distribuição do prêmio depois da correção** do lançamento das vendas; e
- Comparar as situações anterior e posterior de modo a **calcular o repasse de uma filial para a outra**.

Distribuição do prêmio antes da correção

Devemos dividir o prêmio de **R\$ 750 mil** em partes **diretamente proporcionais** às vendas de **3,6 milhões de reais** e **5,4 milhões de reais**.

Suponha que as partes recebidas pelas filiais que venderam **3,6 milhões de reais** e **5,4 milhões de reais** sejam, respectivamente, **a_1** e **b_1** . Nesse caso:

$$\frac{a_1}{3,6} = \frac{b_1}{5,4} = k$$

O prêmio total é de **R\$ 750.000,00**. Logo: $a_1 + b_1 = 750.000$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{3,6} &= \frac{b_1}{5,4} = \frac{a_1 + b_1}{3,6 + 5,4} \\ \frac{a_1}{3,6} &= \frac{b_1}{5,4} = \frac{750.000}{9} \end{aligned}$$



$$\frac{a_1}{3,6} = \frac{b_1}{5,4} = \frac{250.000}{3}$$

Logo:

$$\frac{a_1}{3,6} = \frac{250.000}{3} \rightarrow a_1 = \frac{250.000 \times 3,6}{3} \rightarrow a_1 = 300.000$$

$$\frac{b_1}{5,4} = \frac{250.000}{3} \rightarrow b_1 = \frac{250.000 \times 5,4}{3} \rightarrow b_1 = 450.000$$

Distribuição do prêmio depois da correção

Segundo o enunciado, ocorreu um **lançamento invertido, de modo que a mais na filial que mais vendeu acabou tendo faturamento de R\$0,45 milhão a mais do que deveria**. Logo, após a correção:

- A filial que **menos vendeu** passou a ter um faturamento de **3,6+0,45 = 4,05 milhões de reais**; e
- A filial que **mais vendeu** passou a ter um faturamento de **5,4-0,45 = 4,95 milhões de reais**.

Nessa segunda situação, devemos dividir o prêmio de **R\$ 750 mil** em partes **diretamente proporcionais** às vendas de **4,05 milhões de reais** e **4,95 milhões de reais**.

Suponha que as partes recebidas pelas filiais que venderam **4,05 milhões de reais** e **4,95 milhões de reais** sejam, respectivamente, **a_2** e **b_2** . Nesse caso:

$$\frac{a_2}{4,05} = \frac{b_2}{4,95} = k$$

O prêmio total é de **R\$ 750.000,00**. Logo: $a_2 + b_2 = 750.000$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a_2}{4,05} = \frac{b_2}{4,95} = \frac{a_2 + b_2}{4,05 + 4,95}$$

$$\frac{a_2}{4,05} = \frac{b_2}{4,95} = \frac{750.000}{9}$$

$$\frac{a_2}{4,05} = \frac{b_2}{4,95} = \frac{250.000}{3}$$

Logo:

$$\frac{a_2}{4,05} = \frac{250.000}{3} \rightarrow a_2 = \frac{250.000 \times 4,05}{3} \rightarrow a_2 = 337.500$$

$$\frac{b_2}{4,95} = \frac{250.000}{3} \rightarrow b_2 = \frac{250.000 \times 4,95}{3} \rightarrow b_2 = 412.500$$



Calcular o repasse de uma filial para outra

Note que a filial que mais vendeu recebeu originalmente $b_1 = 450.000$ e, após a correção do lançamento das vendas, ficou com $b_2 = 412.500$. Logo, **a filial que mais vendeu deverá repassar, para a outra filial, o valor de:**

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= 450.000 - 412.500 \\ &= \text{R\$ } 37.500,00 \end{aligned}$$

Note que, novamente, obtivemos a **letra B** como **gabarito**.

Gabarito: Letra B.

4.(VUNESP/TCM SP/2023) Uma verba de R\$ 832 mil reais será distribuída entre as filiais A e B de uma empresa, de forma inversamente proporcional aos valores gastos com advogados para as defenderem em processos abertos por clientes insatisfeitos. Se a razão entre os valores gastos pelas filiais A e B com os advogados é $\frac{3}{5}$, então, a filial A receberá a quantia de

- a) R\$ 138,7 mil.
- b) R\$ 312,0 mil.
- c) R\$ 499,2 mil.
- d) R\$ 520,0 mil.
- e) R\$ 535,7 mil.

Comentários:

Considere que as filiais A e B receberam as quantias a e b da verba de **R\$ 832 mil**.

Suponha também que **a filial B gastou uma quantia x com advogados**. Como a razão entre os valores gastos pelas filiais A e B com os advogados é $\frac{3}{5}$, **a filial A gastou uma quantia $\frac{3}{5}x$** .

Como a verba total foi dividida em partes **inversamente proporcionais** ao valor gasto com advogados, temos:

$$\frac{a}{\frac{1}{3x}} = \frac{b}{\frac{1}{x}} = k$$

$$\frac{a}{\frac{5}{3x}} = \frac{b}{\frac{1}{x}} = k$$

A verba total distribuída é de **R\$ 832 mil**. Logo, $a + b = 832.000$.



Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{\frac{a}{5}}{\frac{3x}{3x}} = \frac{\frac{b}{1}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{a+b}{5}}{\frac{3x}{3x} + \frac{1}{x}}$$

$$\frac{\frac{a}{5}}{\frac{3x}{3x}} = \frac{\frac{b}{1}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{832000}{5+3}}{\frac{3x}{3x}}$$

$$\frac{\frac{a}{5}}{\frac{3x}{3x}} = \frac{\frac{b}{1}}{\frac{1}{x}} = \frac{832000}{\frac{8}{3x}}$$

$$a \times \frac{3x}{5} = b \times \frac{x}{1} = 832.000 \times \frac{3x}{8}$$

$$\frac{3}{5}a \times x = b \times x = 312.000 \times x$$

$$\frac{3}{5}a = b = 312.000$$

Logo, a quantia recebida pela filial A é tal que:

$$\frac{3}{5}a = 312.000$$

$$a = \frac{312.000 \times 5}{3}$$

$$a = \text{R\$ } 520.000,00$$

Gabarito: Letra D.

5.(VUNESP/CMSJC/2022) Os tanques T_1 e T_2 contêm misturas de gasolina e etanol. Sabe-se que as quantidades de etanol em cada tanque são diretamente proporcionais às respectivas quantidades de gasolina, que são iguais a 80 litros em T_1 e 100 litros em T_2 .

Sabendo-se que o tanque T_1 contém 120 litros de etanol, conclui-se que a mistura formada no tanque T_2 contém um total de

- a) 150 litros.
- b) 175 litros.
- c) 200 litros.
- d) 225 litros.
- e) 250 litros.



Comentários:

Sabemos que no **tanque T_1** temos **120 litros de etanol**. Suponha que no **tanque T_2** tenhamos **x litros de etanol**.

As quantidades de etanol em cada tanque são **diretamente proporcionais** às respectivas quantidades de gasolina, que são iguais a **80 litros em T_1** e **100 litros em T_2** . Logo:

$$\frac{\frac{120}{80}}{\text{Etanol/Gasolina no tanque A}} = \frac{\frac{x}{100}}{\text{Etanol/Gasolina no tanque B}} = k$$

Portanto:

$$\frac{12}{8} = \frac{x}{100}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{100}$$

$$2x = 3 \times 100$$

$$x = \frac{300}{2}$$

$$x = 150$$

Logo, o **tanque T_2** contém **150 litros de etanol**. Consequentemente, o **total de litros da mistura do tanque T_2** é:

$$\begin{aligned} &\frac{150}{\text{Litros de etanol no tanque } T_2} + \frac{100}{\text{Litros de gasolina no tanque } T_2} \\ &= 250 \text{ litros} \end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

6.(VUNESP/Pref. Jundiaí/2022) Thamires tem dois cachorros, Rex e Totó, cujas massas corporais são de 30 kg e 22 kg, respectivamente. Ela possui um total de 26 kg de ração em sua dispensa e pretende dividir essa quantidade em duas partes, uma para cada cachorro, de modo que a parte que caberá a cada um seja diretamente proporcional à sua massa corporal. Então, é correto afirmar que a parte que caberá a Rex superará a parte que caberá a Totó em

a) 2 kg.

b) 4kg.



- c) 6 kg.
- d) 8 kg.
- e) 9 kg.

Comentários:

Devemos dividir **26kg de ração** entre **Rex** e **Totó** em partes **diretamente proporcionais** às suas massas corporais, que são, respectivamente, **30kg** e **22kg**.

Suponha que **Rex** e **Totó** receberão **r** e **t** **quilos de ração**, respectivamente. Nesse caso:

$$\frac{r}{30} = \frac{t}{22} = k$$

O **total de ração distribuído** é **26kg**. Logo, $r + t = 26$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{r}{30} = \frac{t}{22} = \frac{r+t}{30+22}$$

$$\frac{r}{30} = \frac{t}{22} = \frac{26}{52}$$

$$\frac{r}{30} = \frac{t}{22} = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\frac{r}{30} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{30}{2} \rightarrow r = 15kg$$

$$\frac{t}{22} = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{22}{2} \rightarrow t = 11kg$$

Logo, a **parte que caberá a Rex** **superará a parte que caberá a Totó** em:

$$\begin{aligned} r - t &= 15 - 11 \\ &= 4kg \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.



7. (VUNESP/IPSM SJC/2022) Três amigos, Carlos, Jonas e Matias fizeram juntos uma aplicação financeira, que após um ano teve um rendimento de R\$ 850,00. Esse rendimento foi dividido de maneira diretamente proporcional ao valor que cada um deles colocou na aplicação. Sabendo que Carlos, Jonas e Matias colocaram, respectivamente, R\$ 800,00, R\$ 1.200,00 e R\$ 1.400,00, o valor recebido por Matias superou o valor recebido por Jonas em

- a) R\$ 150,00.
- b) R\$ 125,00.
- c) R\$ 100,00.
- d) R\$ 75,00.
- e) R\$ 50,00.

Comentários:

Os valores colocados na aplicação por Carlos, Jonas e Matias foram, respectivamente, R\$800, R\$1.200 e R\$1.400.

Suponha que os rendimentos recebidos por Carlos, Jonas e Matias sejam, respectivamente, c , j e m .

A divisão do rendimento total de R\$850 da aplicação financeira foi feita em partes diretamente proporcionais aos valores aplicados. Logo:

$$\frac{c}{800} = \frac{j}{1200} = \frac{m}{1400} = k$$

Como rendimento total da aplicação financeira foi de R\$850, $c + j + m = 850$.

Utilizando a propriedade fundamental da soma das proporções, temos:

$$\frac{c}{800} = \frac{j}{1200} = \frac{m}{1400} = \frac{c + j + m}{800 + 1200 + 1400}$$

$$\frac{c}{800} = \frac{j}{1200} = \frac{m}{1400} = \frac{850}{3400}$$

$$\frac{c}{800} = \frac{j}{1200} = \frac{m}{1400} = \frac{1}{4}$$

Logo:

$$\frac{j}{1200} = \frac{1}{4} \rightarrow j = \frac{1200}{4} \rightarrow j = 300$$

$$\frac{m}{1400} = \frac{1}{4} \rightarrow m = \frac{1400}{4} \rightarrow m = 350$$

Logo, o valor recebido por Matias superou o valor recebido por Jonas em:



$$m - j = 350 - 300 \\ = \text{R\$ } 50,00$$

Gabarito: Letra E.

8. (VUNESP/ISS Piracicaba/2022) Adão, Bianca e Cléber são servidores públicos e, ao final de 2021, receberam bonificações cujos valores foram diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço, expressos em anos. Na ocasião, Adão contava com 15 anos de serviço, Cléber, com 9 anos, e o tempo de serviço de Bianca correspondia à média aritmética simples dos números de anos de serviço de Adão e de Cléber. Se a soma das bonificações recebidas pelos três servidores foi igual a R\$ 12.000,00, é correto afirmar que a diferença entre os valores das bonificações recebidas por Adão e por Bianca é igual a

- a) R\$ 750,00.
- b) R\$ 1.000,00.
- c) R\$ 1.500,00.
- d) R\$ 2.000,00.
- e) R\$ 3.000,00.

Comentários:

Os **tempos de serviço** de **Adão** e **Cléber** são, respectivamente, **15 anos** e **9 anos**. O tempo de serviço de **Bianca** é a média aritmética:

$$\frac{15 + 9}{2} = \frac{24}{2} = \mathbf{12 \text{ anos}}$$

Suponha que as **bonificações recebidas** por **Adão**, **Bianca** e **Cléber** sejam, respectivamente, ***a***, ***b*** e ***c***.

A divisão da bonificação total de **R\$12.000** foi feita em partes **diretamente proporcionais** aos tempos de serviço. Logo:

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{9} = k$$

Como a bonificação total foi de **R\$12.000**, $a + b + c = 12000$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{9} = \frac{a + b + c}{15 + 12 + 9}$$

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{9} = \frac{12000}{36}$$



$$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{9} = \frac{12000}{36}$$

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{12} = \frac{c}{9} = \frac{1000}{3}$$

Logo:

$$\frac{a}{15} = \frac{1000}{3} \rightarrow a = \frac{100 \times 150}{3} \rightarrow a = 5000$$

$$\frac{b}{12} = \frac{1000}{3} \rightarrow b = \frac{1000 \times 12}{3} \rightarrow b = 4000$$

Portanto, a diferença entre os valores das bonificações recebidas por Adão e por Bianca é igual a:

$$\begin{aligned} a - b &= 5000 - 4000 \\ &= \text{R\$ } 1.000,00 \end{aligned}$$

Gabarito: Letra B.

9.(VUNESP/CMSJC/2022) Uma livraria vai doar 1036 livros para três escolas, de maneira que cada escola receberá uma quantidade de livros diretamente proporcional ao número de alunos matriculados. A escola que tem mais alunos receberá 448 livros, e a escola que tem 328 alunos receberá 140 livros a menos do que a segunda maior escola (em número de alunos). O total de alunos matriculados nessas três escolas é igual a

- a) 1332.
- b) 1517.
- c) 1672.
- d) 1804.
- e) 1929.

Comentários:

Suponha que a **segunda maior escola** em número de alunos receba **x livros**. Nesse caso:

- A escola com mais alunos receberá **448 livros**;
- A segunda maior escola receberá **x livros**; e
- A escola com menos alunos receberá 140 livros a menos do que a segunda maior escola, ou seja, receberá **$x-140$ livros**.

O total de livros doados é **1036**. Logo:



$$448 + x + (x - 140) = 1036$$

$$2x + 308 = 1036$$

$$2x = 1036 - 308$$

$$2x = 728$$

$$x = 364$$

Logo:

- A escola com mais alunos receberá **448 livros**;
- A segunda maior escola receberá **364 livros**; e
- A escola com menos alunos receberá **364-140 = 224 livros**.

Sabemos também que **a escola com menos alunos tem 328 alunos**. Suponha que a **escola com mais alunos** e a **segunda maior escola** tenham, respectivamente, ***a*** e ***b*** alunos. Como a divisão dos livros foi feita em partes **diretamente proporcionais** ao número de alunos, temos:

$$\frac{448}{a} = \frac{364}{b} = \frac{224}{328}$$

$$\frac{448}{a} = \frac{364}{b} = \frac{28}{41}$$

Com base nessa proporção, podemos obter os valores de *a* e *b*. Para obter o valor de *a*, temos:

$$\frac{448}{a} = \frac{28}{41}$$

$$28a = 41 \times 448$$

$$a = \frac{41 \times 448}{28}$$

$$a = \frac{41 \times 16}{1}$$

$$a = 656$$

Para obter o valor de *b*, temos:

$$\frac{364}{b} = \frac{28}{41}$$

$$28b = 41 \times 364$$



$$b = \frac{41 \times 364}{28}$$

$$b = \frac{41 \times 364}{28}$$

$$b = \frac{41 \times 13}{1}$$

$$b = 533$$

Logo, o total de alunos nas três escolas é:

$$a + b + 328$$

$$= 656 + 533 + 328$$

$$= 1517$$

Gabarito: Letra B.

10.(VUNESP/Pref. Campinas/2022) A quantia de R\$ 30.000,00 foi dividida entre Ana, Bia e Cléo. Cada uma recebeu sua parte de maneira diretamente proporcional à sua idade. Ana tem 39 anos e Bia recebeu R\$ 8.700,00. Se Cléo é 3 anos mais velha do que Bia, então a quantia recebida por Ana excede a quantia recebida por Cléo em

- a) R\$ 3.000,00.
- b) R\$ 2.400,00.
- c) R\$ 2.700,00.
- d) R\$ 1.800,00.
- e) R\$ 2.100,00.

Comentários:

Sabemos que, da **quantia de R\$ 30.000**, Bia recebeu **R\$ 8.700**. Suponha que **Ana e Cléo receberam**, respectivamente, **a e c** .

Sabemos também que **Ana tem 39 anos**. Supondo que a **idade de Bia é x** , a **idade de Cléo é $x + 3$** , pois ela é 3 anos mais velha do que Bia.

A quantia de **R\$ 30.000** foi dividida em partes **diretamente proporcionais** às idades. Logo:

$$\frac{a}{39} = \frac{8.700}{x} = \frac{c}{x + 3} = k$$

Sabemos que a soma das partes recebidas totaliza a quantia de **R\$ 30.000** Logo, $a + 8.700 + c = 30.000$.



Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{39} = \frac{8.700}{x} = \frac{c}{x+3} = \frac{a+8.700+c}{39+x+(x+3)}$$

$$\frac{a}{39} = \frac{8.700}{x} = \frac{c}{x+3} = \frac{30.000}{42+2x}$$

Podemos obter o valor de x igualando duas das parcelas da proporção:

$$\frac{8.700}{x} = \frac{30.000}{42+2x}$$

Realizando a **multiplicação cruzada**, temos:

$$30.000x = 8.700 \times (42 + 2x)$$

$$30.000x = 365.400 + 17.400x$$

$$30.000x - 17.400x = 365.400$$

$$12.600x = 365.400$$

$$x = \frac{365.400}{12.600}$$

$$x = 29$$

Portanto, **Bia tem 29 anos de idade**. Agora que sabemos o valor de x , ficamos com a seguinte proporção:

$$\frac{a}{39} = \frac{8.700}{29} = \frac{c}{29+3} = \frac{30.000}{42+2 \times 29}$$

$$\frac{a}{39} = 300 = \frac{c}{32} = \frac{30.000}{100}$$

$$\frac{a}{39} = 300 = \frac{c}{32} = 300$$

$$\frac{a}{39} = \frac{c}{32} = 300$$

Portanto:

$$\frac{a}{39} = 300 \rightarrow a = 39 \times 300 \rightarrow a = \mathbf{11.700}$$

$$\frac{c}{32} = 300 \rightarrow c = 32 \times 300 \rightarrow c = \mathbf{9.600}$$



Logo, a quantia recebida por Ana excede a quantia recebida por Cléo em

$$\begin{aligned}a - c &= 11.700 - 9.600 \\&= \text{R\$ } 2.100,00\end{aligned}$$

Gabarito: Letra E.

11.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Duas determinadas grandezas x e y podem assumir valores estritamente positivos. A relação de interdependência entre elas pode ser expressa pela sentença $y = \frac{1}{3}x$

Nesse caso, é correto afirmar que

- a) y não é direta nem inversamente proporcional a x .
- b) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.
- c) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é $1/3$.
- d) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.
- e) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é $1/3$.

Comentários:

Vimos na teoria que uma grandeza A é **diretamente proporcional** a uma grandeza B quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, a razão entre elas é sempre igual a uma constante **k**, denominada **constante de proporcionalidade**.

Como $y = \frac{1}{3}x$, temos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

Isso significa que y é **diretamente proporcional** a x e a razão entre y e x é a **constante de proporcionalidade**, dada por **$1/3$** .

Gabarito: Letra E.

12. (VUNESP/Pref. Serrana/2018) Na tabela, são representadas duas grandezas: a grandeza x e a grandeza y .

Grandeza x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
Grandeza y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n



Assinale a alternativa que contém uma afirmação correta sobre essas duas grandezas:

- a) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.
- b) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.
- c) Se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = \dots = x_n + y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.
- d) Se $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = x_4 \cdot y_4 = \dots = x_n \cdot y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.
- e) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

Comentários:

Vamos comentar cada alternativa da questão.

a) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

ERRADO. Nessa alternativa, afirma-se que se a grandeza x cresce e a grandeza y decresce, então necessariamente x e y são **inversamente proporcionais**.

Lembre-se que isso não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas **inversamente proporcionais**, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, e quando uma grandeza diminui, a outra grandeza aumenta na mesma proporção.**

b) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.

ERRADO. Nessa alternativa, afirma-se que se a grandeza x cresce e a grandeza y cresce, então necessariamente x e y são **diretamente proporcionais**.

Lembre-se que isso não é suficiente para descrever por completo o conceito de grandezas **diretamente proporcionais**, pois há uma condição a mais que deve ser respeitada: **uma grandeza aumenta ou diminui na mesma proporção em que a outra aumenta ou diminui.**

c) Se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = \dots = x_n + y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.

ERRADO. Para grandezas diretamente proporcionais, a razão entre as grandezas deve ser uma constante. A alternativa apresenta a soma das grandezas como uma constante.



d) Se $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = x_4 \cdot y_4 = \dots = x_n \cdot y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

CERTO. Uma grandeza X é **inversamente proporcional** a uma grandeza Y quando, **para todos os valores que podem ser assumidos simultaneamente pelas duas grandezas**, o produto da grandeza X pela grandeza Y é sempre igual a uma constante k , denominada **constante de proporcionalidade**.

$$(\text{Grandeza X}) \times (\text{Grandeza Y}) = k$$

e) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

ERRADO. A questão apresenta a definição de grandezas **diretamente proporcionais**.

Gabarito: Letra D.

13.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Um prêmio de loteria foi dividido entre Hudson e Igor na razão direta dos valores apostados, que foram iguais a R\$ 27,00 e R\$ 33,00, respectivamente. Se Hudson recebeu R\$ 121.500,00, então o valor total do prêmio foi de

- a) R\$ 243.000,00.
- b) R\$ 256.000,00.
- c) R\$ 270.000,00.
- d) R\$ 300.000,00.
- e) R\$ 330.000,00.

Comentários:

O valor do prêmio foi dividido entre Hudson e Igor de maneira **diretamente proporcional** aos valores apostados: R\$ 27,00 e R\$ 33,00. Se considerarmos que o valor recebido por Igor é i , então temos a seguinte proporção:

$$\frac{121.500}{27} = \frac{i}{33} = k$$

Realizando a **multiplicação cruzada** em $\frac{121.500}{27} = \frac{i}{33}$, obtemos:

$$27i = 33 \times 121.500$$

$$i = \frac{33 \times 121.500}{27}$$

$$i = R\$ 148.500$$

O valor total do prêmio é a soma dos valores recebidos por Hudson e Igor:



$$121.500 + 148.500 \\ = R\$ 270.000$$

Gabarito: Letra C.

14. (VUNESP/SEMAE Piracicaba/2019) Três amigos fizeram uma aposta em conjunto em certa loteria. As respectivas participações no valor total da aposta foram diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 6. Se o valor total da aposta foi R\$ 330,00, então o amigo que teve a menor participação nesse valor contribuiu com

- a) R\$ 80,00.
- b) R\$ 70,00.
- c) R\$ 60,00.
- d) R\$ 50,00.
- e) R\$ 40,00.

Comentários:

O valor total da aposta foi dividido proporcionalmente a 2, 3 e 6. Se as partes proporcionais a 2, 3 e 6 forem respectivamente a , b e c , então:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = k$$

A soma das partes é 330. Logo, $a + b + c = 330$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{a + b + c}{2 + 3 + 6}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{330}{11}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = 30$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 30. O amigo que teve a menor participação foi aquele que contribuiu com o valor proporcional a 2:

$$\frac{a}{2} = 30 \rightarrow a = 30$$



Logo, a menor participação foi de R\$ 30,00.

Gabarito: Letra C.

15.(VUNESP/Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R\$ 13,00, outro com R\$ 14,00 e o terceiro com R\$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R\$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

- a) R\$ 1.950,00.
- b) R\$ 2.000,00.
- c) R\$ 2.050,00.
- d) R\$ 2.100,00.
- e) R\$ 2.150,00.

Comentários:

Considere que os amigos que contribuíram com R\$ 13, R\$ 14 e R\$ 22 receberão a , b e c . Como o prêmio total será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = k$$

A soma das partes que cada um recebeu é R\$ 7.350. Logo, $a + b + c = 7350$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{a + b + c}{13 + 14 + 22}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = \frac{7350}{49}$$

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{14} = \frac{c}{22} = 150$$

O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia é a . Temos que:

$$\frac{a}{13} = 150$$

$$a = R\$ 1.950$$

Gabarito: Letra A.



16. (VUNESP/Pref. F.co Morato/2019) Uma imobiliária irá dividir um bônus de R\$ 7.500,00 entre os vendedores Manoel e Pedro, por serem os que mais vendas realizaram durante o último ano. Esse bônus será dividido de forma diretamente proporcional ao número de anos que esses vendedores trabalham na imobiliária. Sabendo que o número de anos que Manoel e Pedro trabalham nessa imobiliária são, respectivamente, 2 e 3, então, a diferença entre os valores recebidos por eles foi

- a) R\$ 2.300,00.
- b) R\$ 2.000,00.
- c) R\$ 1.800,00.
- d) R\$ 1.500,00.
- e) R\$ 1.200,00.

Comentários:

A quantia total distribuída foi dividida em partes proporcionais aos anos trabalhados.

Se Manoel recebeu m e Pedro recebeu p , então:

$$\frac{m}{2} = \frac{p}{3} = k$$

A soma dos valores recebidos por Manoel e Pedro é $m + p = 7.500$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{m}{2} = \frac{p}{3} = \frac{m+p}{2+3}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{p}{3} = \frac{7.500}{5}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{p}{3} = 1.500$$

Portanto, a nossa constante de proporcionalidade é 1.500.

$$\frac{m}{2} = 1.500 \rightarrow m = 3.000$$

$$\frac{p}{3} = 1.500 \rightarrow p = 4.500$$

Portanto, a diferença entre os valores recebidos é:

$$p - m = 4.500 - 3.000 = 1.500$$

Gabarito: Letra D.



17. (VUNESP/Pref Guaratinguetá/2019) Pedro e João montaram uma sociedade com certo capital, sendo que a diferença dos valores dos capitais investidos por Pedro e por João foi igual a R\$ 7.850,00. Ao final de um mês do investimento, ambos dividiram o primeiro lucro em partes diretamente proporcionais aos capitais investidos, sendo R\$ 52,00 a parte do lucro recebida por João e R\$ 156,00 a parte do lucro recebida por Pedro. Assim, pode-se concluir corretamente que o capital total por eles investido foi de

- a) R\$ 15.700,00.
- b) R\$ 15.900,00.
- c) R\$ 16.100,00.
- d) R\$ 16.300,00.
- e) R\$ 15.500,00.

Comentários:

O **lucro obtido** foi dividido em partes **diretamente proporcionais** aos capitais investidos.

Considere que Pedro investiu p e que João investiu j . Nesse caso, temos:

$$\frac{p}{52} = \frac{j}{156} = k$$

Como João recebeu um lucro maior, o capital investido por ele é maior. Logo, a diferença dos valores dos capitais investidos por Pedro e por João é dado por $j - p$:

$$j - p = 7.850$$

Utilizando a **propriedade fundamental da subtração das proporções**, temos:

$$\frac{p}{52} = \frac{j}{156} = \frac{j - p}{156 - 52}$$

$$\frac{p}{52} = \frac{j}{156} = \frac{7.850}{104}$$

O valor recebido por Pedro é tal que:

$$\frac{p}{52} = \frac{7.850}{104} \rightarrow p = 52 \times \frac{7.850}{104} \rightarrow p = \text{R\$ } 3.925$$

O valor recebido por João é tal que:

$$\frac{j}{156} = \frac{7.850}{104} \rightarrow j = 156 \times \frac{7.850}{104} \rightarrow j = \text{R\$ } 11.775$$

Logo, o capital total investido por eles é:

$$p + j = 3.925 + 11.775$$



$$= R\$ 15.700$$

Gabarito: Letra A.

18. (VUNESP/MPE SP/2019) Uma empresa distribui títulos de cobrança para quatro agências de cobrança: A, B, C e D em quantidades iguais de títulos. A agência A é a mais produtiva, consegue cobrar 80% dos títulos, a agência B cobra 60%, a C e a D cobram 30% cada uma. A empresa deseja fazer com que as agências sejam mais competitivas e planeja distribuir os títulos de forma proporcional aos números que elas estão produzindo, ou seja, proporcional aos números 80, 60, 30 e 30. Então, a agência A receberá a porcentagem de títulos para cobrança de:

- a) 80%
- b) 60%
- c) 50%
- d) 40%
- e) 25%

Comentários:

Considere que as agências A, B, C e D receberão uma porcentagem a, b, c e d de títulos de cobrança. Esses valores são proporcionais aos números 80, 60, 30 e 30, respectivamente. Logo:

$$\frac{a}{80} = \frac{b}{60} = \frac{c}{30} = \frac{d}{30} = k$$

Sabemos que a totalidade de títulos corresponde a 100%. Logo, $a + b + c + d = 100\%$.

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{a}{80} = \frac{b}{60} = \frac{c}{30} = \frac{d}{30} = \frac{a + b + c + d}{80 + 60 + 30 + 30}$$

$$\frac{a}{80} = \frac{b}{60} = \frac{c}{30} = \frac{d}{30} = \frac{100\%}{200}$$

$$\frac{a}{80} = \frac{b}{60} = \frac{c}{30} = \frac{d}{30} = 0,5\%$$

A porcentagem recebida pela agência A é tal que:

$$\frac{a}{80} = 0,5\%$$

$$a = 80 \times 0,5\%$$



$$a = 40\%$$

Gabarito: Letra D.

19.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três máquinas X, Y e Z produziram 2 640 peças de certo jogo, cada peça produzida sempre em um mesmo tempo. A máquina X produziu 820 peças, tendo funcionado por 1 hora e 30 minutos a menos do que a máquina Y. A máquina Z funcionou por 6 horas e 50 minutos e produziu um total de peças igual a

- a) 800.
- b) 820.
- c) 840.
- d) 860.
- e) 880.

Comentários:

Como cada peça é produzida sempre em um mesmo tempo, as máquinas produzem uma quantidade de peças de modo diretamente proporcional ao tempo de funcionamento.

Considere que a **máquina Y** funcionou por um **tempo t , em minutos**. Temos que:

- A **máquina X** produziu **820 peças** funcionando por **$t - 90$ minutos** (1h e 30min a menos do que a máquina Y);
- A **máquina Y** produziu **y peças** funcionando por um **tempo t em minutos**.
- A **máquina Z** produziu **z peças** funcionando por **410 minutos** (6h e 50min).

Logo, a proporção é dada por:

$$\frac{820}{t - 90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = k$$

Sabemos que o total de peças é 2.640. Logo:

$$820 + y + z = 2640$$

Utilizando a **propriedade fundamental da soma das proporções**, temos:

$$\frac{820}{t - 90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = \frac{820 + y + z}{(t - 90) + t + 410}$$

$$\boxed{\frac{820}{t - 90} = \frac{y}{t} = \frac{z}{410} = \frac{2640}{2t + 320}}$$



A partir dessa proporção, podemos encontrar o valor de t :

$$\frac{820}{t - 90} = \frac{2640}{2t + 320}$$

$$2640 \times (t - 90) = 820 \times (2t + 320)$$

$$2640t - 237.600 = 1640t + 262.400$$

$$2640t - 1640t = 262.400 + 237.600$$

$$1000t = 500.000$$

$$t = 500$$

Agora que temos o valor de t , podemos obter a quantidade produzida pela máquina z . Da proporção obtida, temos que:

$$\frac{820}{t - 90} = \frac{z}{410}$$

$$\frac{820}{500 - 90} = \frac{z}{410}$$

$$\frac{820}{410} = \frac{z}{410}$$

$$z = 820$$

Logo, a máquina Z produziu um total de peças igual a 820.

Gabarito: Letra B.

20. (VUNESP/CM Jales/2018) Gabriela, Rafaela e Marcela organizaram vários arquivos para uma tia. Cada uma delas organizou a mesma quantidade de arquivos e ficou combinado que elas dividiriam R\$ 1.245,00 em partes inversamente proporcionais ao tempo que cada uma levou na organização. Marcela ganhou R\$ 300,00, e o tempo trabalhado por Gabriela foi 80% do tempo que Rafaela trabalhou. Gabriela recebeu por esse trabalho a quantia de

- a) R\$ 510,00.
- b) R\$ 515,00.
- c) R\$ 520,00.
- d) R\$ 525,00.
- e) R\$ 530,00.



Comentários:

Considere que **Gabriela**, **Rafaela** e **Marcela** receberam as quantias **g** , **r** e **m** e realizaram a atividade nos tempos **t_g** , **t_r** e **t_m** , respectivamente.

Como a quantia total foi dividida em partes inversamente proporcionais ao tempo que cada uma levou na atividade, temos:

$$\frac{g}{\frac{1}{t_g}} = \frac{r}{\frac{1}{t_r}} = \frac{m}{\frac{1}{t_m}} = k$$

Dos dados do problema, temos:

- Marcela ganhou R\$ 300,00: **$m = 300$** ;
- O tempo trabalhado por Gabriela foi 80% do tempo que Rafaela trabalhou: **$t_g = 0,8 t_r$** .

A proporção fica assim:

$$\frac{g}{\frac{1}{0,8 t_r}} = \frac{r}{\frac{1}{t_r}} = \frac{300}{\frac{1}{t_m}} = k$$

Sabemos também que o valor total dividido é de R\$ 1.245,00.

$$g + r + m = 1.245$$

$$g + r + 300 = 1.245$$

$$g + r = 945$$

Como temos o valor de $g + r$, vamos utilizar a **propriedade fundamental da soma das proporções** somente na proporção $\frac{g}{\frac{1}{0,8 t_r}} = \frac{r}{\frac{1}{t_r}}$. Temos:

$$\frac{g}{\frac{1}{0,8 t_r}} = \frac{r}{\frac{1}{t_r}} = \frac{g + r}{\frac{1}{0,8 t_r} + \frac{1}{t_r}}$$

$$0,8 t_r g = t_r r = \frac{945}{\left(\frac{1}{0,8} + 1\right) \times \frac{1}{t_r}}$$

$$0,8 t_r g = t_r r = \frac{945 t_r}{\left(\frac{10}{8} + 1\right)}$$

Note que simplificar t_r nas igualdades. Ficamos com:



$$0,8g = r = \frac{945}{2,25}$$

$$0,8g = r = 420$$

O valor recebido por Gabriela é:

$$0,8g = 420$$

$$g = \frac{420}{0,8}$$

$$g = R\$ 525$$

Gabarito: Letra D.

21. (VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três amigos dividiram 920 figurinhas em partes inversamente proporcionais às suas idades. Um amigo recebeu 360 figurinhas e outro 240. Se o mais velho desses amigos tem 12 anos, a soma das idades desses três amigos, em anos, é

- a) 25.
- b) 23.
- c) 29.
- d) 27.
- e) 31.

Comentários:

Temos um total de 920 figurinhas. Sabemos que um amigo recebeu **360 figurinhas** e outro **240**. Portanto, o amigo que resta recebeu:

$$920 - 360 - 240 = \mathbf{320 \text{ figurinhas}}$$

Note que o mais velho tem **12 anos**. Como a divisão das figurinhas é de modo **inversamente proporcional** às idades, o mais velho receberá a menor quantia. Portanto, o mais velho receberá **240 figurinhas**.

Considere que quem recebeu **320 figurinhas** tenha uma **idade a** e quem recebeu **360 figurinhas** tenha uma **idade b**. Como a divisão é inversamente proporcional às idades, temos a seguinte proporção:

$$\frac{320}{\frac{1}{a}} = \frac{360}{\frac{1}{b}} = \frac{240}{\frac{1}{12}}$$



$$320a = 360b = 12 \times 240$$

$$320a = 360b = 2880$$

Portanto:

$$320a = 2880 \rightarrow a = 9$$

$$360b = 2880 \rightarrow b = 8$$

Logo, a soma das idades é:

$$a + b + 12$$

$$= 9 + 8 + 12 = 29$$

Gabarito: Letra C.



LISTA DE QUESTÕES – VUNESP

Frações

1.(VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) A expectativa de vida numa região da Europa é de, aproximadamente, 85 anos. Uma pessoa que já viveu $\frac{15}{17}$ dessa idade, ainda tem para viver, segundo a expectativa, aproximadamente,

- a) 2 anos.
- b) 10 anos.
- c) 13 anos.
- d) 15 anos.
- e) 17 anos.

2. (VUNESP/Pref. Marília/2023) Segundo dados do IBGE, em 2010, a população urbana de Marília era de, aproximadamente, 207.000 pessoas. Considerando-se que a população urbana representava, à época, cerca de $\frac{23}{24}$ da população, então a população de Marília naquele ano era de, aproximadamente,

- a) 8.625
- b) 9.000
- c) 198.375
- d) 207.000
- e) 216.000

3. (VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) Os alunos de uma turma serão divididos em grupos contendo a mesma quantidade de estudantes em cada grupo. No dia da divisão, $\frac{2}{7}$ dos alunos faltaram, e a professora fez a divisão somente com os alunos presentes. Desse modo, após a divisão dos alunos presentes em 5 grupos iguais, a fração que representa o número de alunos em cada grupo, em relação ao total de alunos da turma, é igual a

- a) $\frac{2}{7}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{7}$



- d) $\frac{2}{35}$
e) $\frac{1}{35}$

4.(VUNESP/Pref. Piracicaba/2023) Um restaurante fez a seguinte promoção:



Para comemorar seu aniversário de 65 anos, Jonas levou seu filho de 40 anos, sua nora de 38 anos e seus três netos de 6, 9 e 14 anos para almoçarem no restaurante com a promoção dada. A conta final ficou em R\$ 250,00.

O preço inteiro do almoço nesse restaurante é de

- a) R\$ 40,00.
b) R\$ 48,00.
c) R\$ 55,00.
d) R\$ 60,00.
e) R\$ 65,00.

5.(VUNESP/Pref. Pindamonhangaba/2023) Em um grupo, com determinado número de pessoas, somente $\frac{3}{8}$ havia tomado certa vacina e o respectivo reforço dela. Entre as demais pessoas, $\frac{4}{5}$ havia tomado somente a vacina e as outras 15 pessoas não tinham tomado a vacina. O número de pessoas que havia tomado somente a vacina era

- a) 120.
b) 100.
c) 80.
d) 60.
e) 40.



6.(VUNESP/CAMPREV/2023) Considere 4 recipientes de capacidades totais iguais, cada um deles contendo quantidades diferentes de um mesmo líquido, que correspondem, respectivamente, a $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ da capacidade total. Roger juntou todo esse líquido em uma vasilha, e em seguida, usou esse líquido para preencher totalmente 2 dos recipientes, sem transbordar. Após esse preenchimento, a quantidade de líquido que restou na vasilha corresponde, da capacidade total de um recipiente, a

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{6}$

7.(VUNESP/ISS Jaguariúna/2023) Do total de documentos a serem analisados, a quinta parte foi analisada por Carla no dia de ontem, a quarta parte do restante foi analisada por Elias no dia de hoje, e cada metade dos documentos não analisados ontem e hoje serão analisados por Rodrigo e Cintia, amanhã. Sendo assim, é correto afirmar que

- a) Carla analisou mais documentos do que os que serão analisados por Rodrigo.
- b) Elias analisou mais documentos do que os que serão analisados por Cintia.
- c) Rodrigo analisará a mesma quantidade de documentos que foi analisada por Elias.
- d) Cintia analisará a mesma quantidade de documentos que foi analisada por Carla.
- e) Cintia e Rodrigo analisarão mais documentos do que os que foram analisados por Carla e Elias.

8.(VUNESP/Pref. Sorocaba/2023) Em um escritório trabalham Alex, Beto e Caio. Certo dia, esses rapazes receberam um determinado número de documentos para serem arquivados. Alex iniciou o serviço e ele primeiro arquivou 5 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou. Em seguida, Beto arquivou 10 documentos e depois arquivou um quinto do que sobrou. Finalmente, Caio arquivou os documentos restantes. Sabendo que Alex e Beto arquivaram o mesmo número de documentos, o número de documentos que Caio arquivou foi

- a) 10.
- b) 20.
- c) 30.



- d) 40.
- e) 50.

9.(VUNESP/ALESP/2022) Uma pessoa deve R\$ 3.000,00 e vai pagar essa dívida em prestações mensais. O valor de cada prestação é igual à décima parte da dívida restante no momento do pagamento. Não há incidência de juros sobre a dívida. Realizados 3 pagamentos, essa pessoa ainda deve um valor, em reais, entre

- a) 2.130 e 2.150.
- b) 2.150 e 2.170.
- c) 2.090 e 2.110.
- d) 2.170 e 2.190.
- e) 2.110 e 2.130.

10. (VUNESP/PM SP/2022) De um valor total disponível em reais, a quarta parte foi destinada para o pagamento de um compromisso A; com a metade do que não foi utilizado para o compromisso A, pagou-se um compromisso B; e o restante, R\$ 187,50, foi depositado em um investimento.

A diferença entre o que foi investido e o que foi destinado para o pagamento do compromisso A é de

- a) R\$ 18,00.
- b) R\$ 62,50.
- c) R\$ 36,00.
- d) R\$ 54,50.
- e) R\$ 0,00.

11.(VUNESP/ALESP/2022) Um trem do metrô está em movimento e em um dos vagões há 175 passageiros. Há assentos para $\frac{2}{7}$ desses passageiros e estão todos ocupados. Ao parar na estação seguinte, 23 pessoas desembarcam, sendo que, destas 23 pessoas, 12 estavam anteriormente sentadas. Outras 5 pessoas embarcaram e, quando o trem reiniciou sua viagem, havia apenas 3 assentos não ocupados. Nesse momento o número de pessoas que não ocupavam assentos é igual a

- a) 112.
- b) 125.
- c) 110.



- d) 115.
- e) 98.

12. (VUNESP/ALESP/2022) Em uma reunião para deliberar sobre um projeto e com x participantes, sabe-se, de entrada, que $\frac{3}{5}$ dos participantes disseram que eram contrários ao projeto. Dentre aqueles que não são contrários ao projeto, $\frac{1}{4}$ já são a favor e são 30 pessoas. Após a fala do autor do projeto, $\frac{3}{4}$ daqueles que eram inicialmente contrários mudaram de ideia e estão a favor. Metade daqueles que não eram contrários nem a favor, depois da fala do autor, ficaram a favor. Ninguém mais mudou de posição. A diferença entre aqueles que estão a favor e aqueles que não estão a favor é igual a

- a) 100.
- b) 110.
- c) 130.
- d) 140.
- e) 120.

13. (VUNESP/AVAREPREV/2020) João gasta $\frac{3}{4}$ do seu salário em alimentação e aluguel e economiza $\frac{1}{3}$ do restante. A fração que indica o quanto João economiza do seu salário é

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{1}{12}$
- d) $\frac{2}{12}$

14. (VUNESP/CODEN/2021) Das pessoas de uma comunidade que participaram de uma pesquisa, apenas $\frac{3}{8}$ concluíram o ensino médio. Entre as pessoas que não concluíram o ensino médio, somente $\frac{1}{4}$ concluiu o ensino fundamental, o que corresponde a 180 pessoas. O número total de pessoas entrevistadas foi

- a) 750 pessoas.
- b) 875 pessoas.
- c) 1 152 pessoas.



- d) 1 248 pessoas.
- e) 1 450 pessoas.

15. (VUNESP/CODEN/2021) Um comércio tem 4 atendentes e, em determinado dia, foi realizada certa quantidade de vendas, das quais, Maria realizou um quinto dessa quantidade, Renato realizou um terço dessa quantidade, Rosa realizou um sétimo das vendas não realizadas por Maria e não realizadas por Renato, e Nelson realizou o restante das vendas, o que correspondeu a 18 vendas. O número de vendas realizadas por Renato foi

- a) 18.
- b) 15.
- c) 12.
- d) 9.
- e) 6.

16.(VUNESP/Pref. Cananéia/2020) Do número total de questões de uma prova de certo concurso, Isa acertou $\frac{5}{6}$ e Ana acertou $\frac{3}{5}$. Se Isa acertou 14 questões a mais que Ana, então o número de questões que Ana acertou é

- a) 50.
- b) 46.
- c) 40.
- d) 36.
- e) 30.

17. (VUNESP/Pref. Peruíbe/2019) Para uma atividade recreativa, os alunos tinham que levar palitos de sorvete. Ana e Bia levaram, juntas, 108 palitos, sendo que o número de palitos levados por Ana era igual a $\frac{4}{5}$ do número de palitos levados por Bia. O número de palitos que Bia levou a mais do que Ana foi

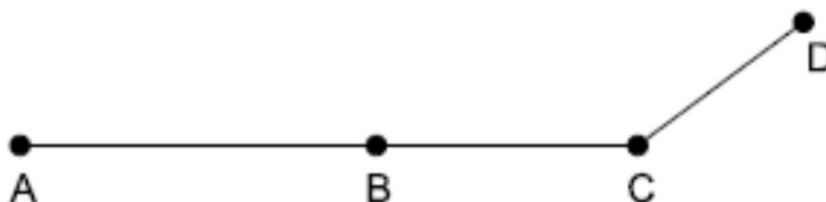
- a) 8.
- b) 10.
- c) 12.
- d) 14.
- e) 16.



18. (VUNESP/Pref. Cerquilha/2019) Em uma empresa, apenas $\frac{1}{5}$ dos funcionários tem ensino superior completo. Além disso, da parcela que não concluiu o ensino superior, $\frac{2}{3}$ não têm o ensino médio completo, o que corresponde a 40 funcionários. O número de funcionários que concluíram o ensino superior é igual a

- a) 10.
- b) 12.
- c) 15.
- d) 20.
- e) 25.

19. (VUNESP/CM Orlândia/2019) Um motorista foi da cidade A até a cidade D, passando pelas cidades B e C, conforme o trajeto indicado na figura.



Sabe-se que, quando chegou à cidade B, ele já havia percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto total e que, quando chegou à cidade C, já havia percorrido $\frac{3}{4}$ do trajeto total. Se a distância entre as cidades B e C é de 35 km, então a distância total percorrida pelo motorista nesse trajeto foi de

- a) 90 km.
- b) 100 km.
- c) 110 km.
- d) 120 km.
- e) 140 km.



GABARITO – VUNESP

Frações

1. LETRA B
2. LETRA E
3. LETRA C
4. LETRA D
5. LETRA D
6. LETRA E
7. LETRA E
8. LETRA D
9. LETRA D
10. LETRA B
11. LETRA C
12. LETRA E
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA B
16. LETRA D
17. LETRA C
18. LETRA C
19. LETRA B



LISTA DE QUESTÕES – VUNESP

Razão e proporção

1.(VUNESP/SP Trans/2024) No início de certo ano, um estacionamento oferece 120 vagas para aluguel mensal e 200 vagas no sistema rotativo (cobrança por hora). Após uma ampliação, esse estacionamento passou a oferecer mais 160 vagas, sendo parte de aluguel mensal e parte de vagas rotativas, de maneira que a razão entre o número total de vagas para aluguel mensal e o número total de vagas rotativas passou a ser $2/3$. O número de novas vagas rotativas na ampliação foi

- a) 56.
- b) 64.
- c) 72.
- d) 80.
- e) 88.

2.(VUNESP/PM SP/2023) Com base nas informações que constam no site da Polícia Militar do Estado de São Paulo, pode-se concluir que, no mês de setembro de 2022, a cada hora, para cada pessoa presa em flagrante, 3 resgates foram efetuados. Se, no referido período de tempo, a soma do número de pessoas presas em flagrante com o número de resgates efetuados totalizou 36, então, o número de resgates foi igual a

- a) 27.
- b) 15.
- c) 9.
- d) 33.
- e) 21.

3.(VUNESP/CAMPREV/2023) Sabe-se que a razão entre as medidas, em centímetros, do comprimento e da largura de um tampo de mesa retangular é de 7 para 3, e que a diferença entre essas medidas é igual a 120 cm. Nessas condições, é correto afirmar que a medida da largura desse tampo é igual a

- a) 70 cm.
- b) 75 cm.
- c) 80 cm.
- d) 85 cm.
- e) 90 cm.



4.(VUNESP/Pref Jundiaí/2023) Em certo departamento, o número de colaboradores com cargo B supera o número de colaboradores com cargo A em 6 pessoas. Sabendo que a razão entre esses números, na ordem apresentada, é $\frac{3}{2}$, exercem esses cargos um total de colaboradores igual a

- a) 12.
- b) 18.
- c) 25.
- d) 30.
- e) 40.

5.(VUNESP/Pref SBC/2023) Segundo dados do IBGE (2021) referentes à educação no município de São Bernardo do Campo, a razão entre o número de matrículas no ensino médio e o número de matrículas no ensino fundamental foi igual a $\frac{15}{49}$.

Considerando que 128 000 alunos se matricularam nas escolas do município, no ano de 2021, então, o número de matriculados no ensino fundamental foi de

- a) 49 000.
- b) 68 200.
- c) 73 500.
- d) 88 200.
- e) 98 000.

6. (VUNESP/TJ SP/2023) Em uma pesquisa realizada em 2019, com 200 pessoas, identificou-se que a razão entre o número de pessoas que não tinham filho ou filha e o número de pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) era $\frac{6}{19}$. No ano passado, as mesmas pessoas participaram de outra pesquisa, ocasião em que foi identificado que o número de pessoas que não tinham filho ou filha havia diminuído em 12 unidades. Na pesquisa realizada no passado, a razão entre os números das pessoas que não tinham filho ou filha e das pessoas que tinham filho(s) ou filha(s) foi:

- a) $\frac{3}{10}$.
- b) $\frac{9}{41}$.
- c) $\frac{9}{38}$.
- d) $\frac{3}{7}$.
- e) $\frac{12}{41}$.

7.(VUNESP/DPE SP/2023) Em um hospital, 105 funcionários são médicos ou enfermeiros. São 2 médicos para cada 13 enfermeiros. A contratação de 3 médicos e de 11 enfermeiros fez com que a razão de médicos para enfermeiros se tornasse



- a) $\frac{2}{9}$
- b) $\frac{3}{11}$
- c) $\frac{1}{17}$
- d) $\frac{5}{19}$
- e) $\frac{1}{6}$

8. (VUNESP/UNICAMP/2023) Em certo laboratório, para cada 4 computadores com mais de 1 ano de utilização, existem 7 computadores com 1 ano ou menos de utilização. Se, ao todo, há 44 computadores nesse laboratório, e serão comprados alguns computadores novos para que a razão entre o número de computadores com mais de 1 ano de utilização e o número de computadores com 1 ano ou menos de utilização seja de 1 para 2, então o número de novos computadores que serão comprados é igual a

- a) 3.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 6.
- e) 7.

9. (VUNESP/Pref Sorocaba/2023) Em uma empresa, no início de 2021, a razão entre o número de funcionários que faziam compras com dinheiro em cédulas e o número de funcionários que só compravam com cartões era $\frac{3}{2}$. No fim de 2021, 54 funcionários passaram a só fazer compras com cartões e, dessa maneira, a razão indicada passou a ser $\frac{18}{17}$. Considerando que em 2021 não houve mudanças no quadro de funcionários, o total dessas pessoas que ainda faziam compras com dinheiro em cédulas no fim de 2021 era

- a) 234.
- b) 243.
- c) 324.
- d) 342.
- e) 423.

10. (VUNESP/Pref. Peruíbe/2023) Em uma empresa com um total de 77 funcionárias, a razão entre o número de funcionárias e o total de funcionários é $\frac{6}{11}$.

Se forem contratadas outras 14 funcionárias, a razão entre o número de funcionárias e o total de funcionários passará a ser:

- a) $\frac{7}{12}$
- b) $\frac{8}{13}$



- c) $\frac{9}{14}$
- d) $\frac{10}{15}$
- e) $\frac{11}{16}$

11.(VUNESP/CMSJC/2022) Os parafusos dos pedidos A e B, de quantidades iguais, foram totalmente distribuídos em pacotes. A razão entre o número de parafusos colocados em cada pacote do pedido A e em cada pacote do pedido B é igual a $\frac{2}{3}$.

Sabendo-se que em cada pacote do pedido A, foram colocados 48 parafusos, sendo necessários 30 pacotes, conclui-se que, para o pedido B, o número de pacotes necessários foi igual a

- a) 18.
- b) 20.
- c) 22.
- d) 24.
- e) 26.

12. (VUNESP/ALESP/2022) Em uma empresa com 420 funcionários, a razão entre funcionários homens e funcionárias é 1,4. A empresa dispensará 20 funcionários homens e contratará funcionárias, de modo que a razão entre funcionários homens e funcionárias seja igual a 1. Isto feito, o número total de funcionários da empresa aumentará em

- a) 40.
- b) 30.
- c) 20.
- d) 50.
- e) 60.

13.(VUNESP/CODEN/2021) Em certa empresa, os funcionários têm, pelo menos, o ensino médio completo e sabe-se que, para cada funcionário com ensino superior completo, existem quatro funcionários com somente o ensino médio completo. Se nessa empresa trabalham, ao todo, 160 funcionários, então a diferença entre o número de funcionários com somente o ensino médio completo e o número de funcionários com o ensino superior completo é igual a

- a) 80.
- b) 88.
- c) 96.



- d) 104.
- e) 112.

14. (VUNESP/FITO/2020) Em um grupo de amigos, o número de casados supera o número de não casados em 3 pessoas. Sabendo-se que a razão entre os números de não casados e casados é $\frac{3}{4}$, o número de pessoas nesse grupo é igual a

- a) 14.
- b) 21.
- c) 28.
- d) 35.
- e) 42.

15. (VUNESP/FITO/2020) Sobre os 1 430 candidatos que prestaram a última fase de um concurso, sabe-se que a razão entre o número de aprovados e o número de não aprovados é $\frac{4}{7}$. O número de candidatos aprovados nessa fase do concurso é

- a) 520.
- b) 530.
- c) 540.
- d) 550.
- e) 560.

16. (VUNESP/FITO/2020) Para a fabricação de um produto líquido, utiliza-se uma matéria prima que é comprada ao preço de R\$ 15,00 o litro, e sabe-se que, com 10 litros dessa matéria prima, são fabricados 70 litros desse produto, que é vendido a R\$ 5,00, o litro. Certo dia, o valor obtido com a venda desse produto foi de R\$ 1.120,00. Logo, o valor gasto com a matéria prima correspondente à fabricação da quantidade de litros vendidos, nesse dia, foi de

- a) R\$ 435,00.
- b) R\$ 450,00.
- c) R\$ 465,00.
- d) R\$ 480,00.
- e) R\$ 495,00.



17.(VUNESP/Pref Olímpia/2019) Em um determinado posto de atendimento ao público, há 2 filas de espera, uma para atendimento preferencial e outra para atendimento não preferencial. Na fila para atendimento não preferencial, há 45 pessoas. Sabendo que a razão entre o número de pessoas na fila para atendimento preferencial e o número de pessoas na fila para atendimento não preferencial é $\frac{2}{5}$, então o número de pessoas na fila para atendimento preferencial é

- a) 16.
- b) 18.
- c) 20.
- d) 22.
- e) 24.

18. (VUNESP/Pref. SJC/2019) Em abril de 2019, foi publicada a seguinte notícia em alguns jornais eletrônicos:

Dois em cada três hotéis vazam dados pessoais de hóspedes.

Considerando-se verdadeira essa informação, é correto afirmar que

- a) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é o dobro do número de hotéis que não vazam esses dados.
- b) a razão entre o número de hotéis que não vazam dados pessoais de hóspedes e o número de hotéis que vazam esses dados é $\frac{1}{3}$.
- c) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é $\frac{2}{3}$ do número de hotéis que não vazam esses dados.
- d) a razão entre o número de hotéis que não vazam dados pessoais de hóspedes e o número total de hotéis é $\frac{3}{5}$.
- e) o número de hotéis que vazam dados pessoais de hóspedes é $\frac{3}{4}$ do número de hotéis que não vazam esses dados.

19. (VUNESP/CM Nova Odessa/2018) Em um concurso público, estavam sendo avaliados somente candidatos para os cargos A ou B. Nesse concurso, cada candidato poderia fazer inscrição para apenas um desses cargos, e sabe-se que a razão entre os números de candidatos inscritos aos cargos A e B, nessa ordem, é igual a 0,2. Sendo assim, o número de candidatos inscritos ao cargo B corresponde, do número total de candidatos inscritos, a

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{4}{5}$
- c) $\frac{5}{6}$



- d) $\frac{7}{8}$
- e) $\frac{8}{9}$

20. (VUNESP/PAULIPREV/2018) Um casal tem dois filhos, Cláudio e Marisa. A razão entre as idades do pai e do filho e a razão entre as idades da mãe e da filha são proporcionais. Sendo a idade do pai 48, da mãe 42 e do filho 18 anos, a idade de Marisa está entre

- a) 12 e 13 anos.
- b) 13 e 14 anos.
- c) 14 e 15 anos.
- d) 15 e 16 anos.
- e) 16 e 17 anos.

21. (VUNESP/TJ SP/2015) Uma verba total de R\$ 1,5 milhão foi aplicada na realização de dois projetos, A e B. Sabendo-se que a razão entre a parte aplicada no projeto A e a parte aplicada no projeto B, nessa ordem, pode ser representada pelo número 1,4, é correto afirmar que no projeto B, quando comparado ao projeto A, foram aplicados

- a) R\$ 600 mil a mais.
- b) R\$ 250 mil a menos.
- c) R\$ 600 mil a menos.
- d) R\$ 425 mil a menos.
- e) R\$ 250 mil a mais.

22. (VUNESP/TJ SP/2013) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, $\frac{2}{5}$ dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que $\frac{1}{4}$ dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, nessa escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e o número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de

- a) 2:3.
- b) 1:3.
- c) 1:6.
- d) 3:4.
- e) 2:5.



23.(VUNESP/TJ SP/2009) Uma dívida será paga em 20 parcelas mensais fixas e iguais, sendo que, hoje, o valor de cada parcela representa $\frac{1}{4}$ do salário líquido mensal do devedor. Hoje, o salário líquido mensal do devedor representa, do valor total da dívida,

- a) $\frac{1}{10}$.
- b) $\frac{1}{9}$.
- c) $\frac{1}{8}$.
- d) $\frac{1}{7}$.
- e) $\frac{1}{5}$.

24. (VUNESP/TJ SP/2009) No tanque completamente vazio de um carro bicomcombustível, foram colocados 9 litros de gasolina e 15 litros de álcool. Num segundo momento, sem que o carro tivesse saído do posto, foram colocados mais alguns litros de álcool, e a razão entre o número de litros de álcool e o número de litros de gasolina contidos no tanque passou a ser de 3 para 1. O número de litros de álcool colocados nesse segundo momento foi

- a) 8.
- b) 9.
- c) 12.
- d) 15.
- e) 16.



GABARITO – VUNESP

Razão e proporção

1. LETRA E
2. LETRA A
3. LETRA E
4. LETRA D
5. LETRA E
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA B
9. LETRA C
10. LETRA B
11. LETRA D
12. LETRA B
13. LETRA C
14. LETRA B
15. LETRA A
16. LETRA D
17. LETRA B
18. LETRA A
19. LETRA C
20. LETRA D
21. LETRA B
22. LETRA C
23. LETRA E
24. LETRA C



LISTA DE QUESTÕES – VUNESP

Proporções

1.(VUNESP/Pref Pindamonhangaba/2023) Uma verba de R\$ 200 mil será destinada para a compra de novos computadores, de modo a substituir os computadores mais antigos em duas secretarias municipais de certa cidade. Sabendo-se que a verba será dividida proporcionalmente, de acordo com a quantidade de computadores com mais de 5 anos de uso nessas duas secretarias, e que em uma dessas secretarias há 14 máquinas, enquanto que na outra há 11 máquinas com mais de 5 anos de uso, a diferença entre os valores que serão destinados para ambas as secretarias será de

- a) R\$ 22 mil.
- b) R\$ 24 mil.
- c) R\$ 26 mil.
- d) R\$ 28 mil.
- e) R\$ 30 mil.

2. (VUNESP/CAMPREV/2023) Aberta com vazão constante, uma torneira despejou um total de 520 litros de água em dois reservatórios, A e B, inicialmente vazios, sendo essa quantidade repartida entre eles em partes diretamente proporcionais aos tempos necessários para preenchê-los completamente, que foram iguais a 40 minutos e 1 hora e 4 minutos, respectivamente. Nessas condições, é correto afirmar que a diferença entre as quantidades recebidas pelos reservatórios B e A foi igual a

- a) 100 litros.
- b) 120 litros.
- c) 140 litros.
- d) 150 litros.
- e) 160 litros.

3.(VUNESP/TCM SP/2023) Dividiu-se um prêmio de R\$ 750 mil entre duas filiais de uma empresa, de forma diretamente proporcional às vendas efetuadas por elas, no ano anterior. Para tanto, identificou-se que, no ano anterior, uma das filiais vendeu o valor de R\$ 3,6 milhões, e a outra, R\$ 5,4 milhões. Ocorre que, após uma conferência das informações, identificou-se que houve um lançamento de vendas invertido, em determinado mês, o que gerou um lançamento indevido de R\$ 0,45 milhão a mais na filial que mais vendeu.

Sendo assim, a filial que mais vendeu deverá repassar, para a outra filial, o valor de

- a) R\$ 2.250,00.
- b) R\$ 37.500,00.



- c) R\$ 83.250,00.
- d) R\$ 112.500,00.
- e) R\$ 150.000,00.

4.(VUNESP/TCM SP/2023) Uma verba de R\$ 832 mil reais será distribuída entre as filiais A e B de uma empresa, de forma inversamente proporcional aos valores gastos com advogados para as defenderem em processos abertos por clientes insatisfeitos. Se a razão entre os valores gastos pelas filiais A e B com os advogados é $\frac{3}{5}$, então, a filial A receberá a quantia de

- a) R\$ 138,7 mil.
- b) R\$ 312,0 mil.
- c) R\$ 499,2 mil.
- d) R\$ 520,0 mil.
- e) R\$ 535,7 mil.

5.(VUNESP/CMSJC/2022) Os tanques T_1 e T_2 contêm misturas de gasolina e etanol. Sabe-se que as quantidades de etanol em cada tanque são diretamente proporcionais às respectivas quantidades de gasolina, que são iguais a 80 litros em T_1 e 100 litros em T_2 .

Sabendo-se que o tanque T_1 contém 120 litros de etanol, conclui-se que a mistura formada no tanque T_2 contém um total de

- a) 150 litros.
- b) 175 litros.
- c) 200 litros.
- d) 225 litros.
- e) 250 litros.

6.(VUNESP/Pref. Jundiaí/2022) Thamires tem dois cachorros, Rex e Totó, cujas massas corporais são de 30 kg e 22 kg, respectivamente. Ela possui um total de 26 kg de ração em sua dispensa e pretende dividir essa quantidade em duas partes, uma para cada cachorro, de modo que a parte que caberá a cada um seja diretamente proporcional à sua massa corporal. Então, é correto afirmar que a parte que caberá a Rex superará a parte que caberá a Totó em

- a) 2 kg.
- b) 4kg.
- c) 6 kg.
- d) 8 kg.
- e) 9 kg.



7. (VUNESP/IPSM SJC/2022) Três amigos, Carlos, Jonas e Matias fizeram juntos uma aplicação financeira, que após um ano teve um rendimento de R\$ 850,00. Esse rendimento foi dividido de maneira diretamente proporcional ao valor que cada um deles colocou na aplicação. Sabendo que Carlos, Jonas e Matias colocaram, respectivamente, R\$ 800,00, R\$ 1.200,00 e R\$ 1.400,00, o valor recebido por Matias superou o valor recebido por Jonas em

- a) R\$ 150,00.
- b) R\$ 125,00.
- c) R\$ 100,00.
- d) R\$ 75,00.
- e) R\$ 50,00.

8. (VUNESP/ISS Piracicaba/2022) Adão, Bianca e Cléber são servidores públicos e, ao final de 2021, receberam bonificações cujos valores foram diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço, expressos em anos. Na ocasião, Adão contava com 15 anos de serviço, Cléber, com 9 anos, e o tempo de serviço de Bianca correspondia à média aritmética simples dos números de anos de serviço de Adão e de Cléber. Se a soma das bonificações recebidas pelos três servidores foi igual a R\$ 12.000,00, é correto afirmar que a diferença entre os valores das bonificações recebidas por Adão e por Bianca é igual a

- a) R\$ 750,00.
- b) R\$ 1.000,00.
- c) R\$ 1.500,00.
- d) R\$ 2.000,00.
- e) R\$ 3.000,00.

9. (VUNESP/CMSJC/2022) Uma livraria vai doar 1036 livros para três escolas, de maneira que cada escola receberá uma quantidade de livros diretamente proporcional ao número de alunos matriculados. A escola que tem mais alunos receberá 448 livros, e a escola que tem 328 alunos receberá 140 livros a menos do que a segunda maior escola (em número de alunos). O total de alunos matriculados nessas três escolas é igual a

- a) 1332.
- b) 1517.
- c) 1672.
- d) 1804.
- e) 1929.



10.(VUNESP/Pref. Campinas/2022) A quantia de R\$ 30.000,00 foi dividida entre Ana, Bia e Cléo. Cada uma recebeu sua parte de maneira diretamente proporcional à sua idade. Ana tem 39 anos e Bia recebeu R\$ 8.700,00. Se Cléo é 3 anos mais velha do que Bia, então a quantia recebida por Ana excede a quantia recebida por Cléo em

- a) R\$ 3.000,00.
- b) R\$ 2.400,00.
- c) R\$ 2.700,00.
- d) R\$ 1.800,00.
- e) R\$ 2.100,00.

11.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Duas determinadas grandezas x e y podem assumir valores estritamente positivos. A relação de interdependência entre elas pode ser expressa pela sentença $y = \frac{1}{3}x$

Nesse caso, é correto afirmar que

- a) y não é direta nem inversamente proporcional a x .
- b) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.
- c) y é inversamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é $1/3$.
- d) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é 3.
- e) y é diretamente proporcional a x e a constante de proporcionalidade é $1/3$.

12. (VUNESP/Pref. Serrana/2018) Na tabela, são representadas duas grandezas: a grandeza x e a grandeza y .

Grandeza x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
Grandeza y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n

Assinale a alternativa que contém uma afirmação correta sobre essas duas grandezas:

- a) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.
- b) Se $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$ e $y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n$, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.
- c) Se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = \dots = x_n + y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas diretamente proporcionais.



d) Se $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = x_4 \cdot y_4 = \dots = x_n \cdot y_n = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

e) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_4}{y_4} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, sendo k um número real, então x e y são grandezas inversamente proporcionais.

13.(VUNESP/Pref. Alumínio/2016) Um prêmio de loteria foi dividido entre Hudson e Igor na razão direta dos valores apostados, que foram iguais a R\$ 27,00 e R\$ 33,00, respectivamente. Se Hudson recebeu R\$ 121.500,00, então o valor total do prêmio foi de

- a) R\$ 243.000,00.
- b) R\$ 256.000,00.
- c) R\$ 270.000,00.
- d) R\$ 300.000,00.
- e) R\$ 330.000,00.

14.(VUNESP/SEMAE Piracicaba/2019) Três amigos fizeram uma aposta em conjunto em certa loteria. As respectivas participações no valor total da aposta foram diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 6. Se o valor total da aposta foi R\$ 330,00, então o amigo que teve a menor participação nesse valor contribuiu com

- a) R\$ 80,00.
- b) R\$ 70,00.
- c) R\$ 60,00.
- d) R\$ 50,00.
- e) R\$ 40,00.

15.(VUNESP/Pref. Buritizal/2018) Três amigos fizeram um bolão para um jogo de loteria, sendo que um deles colaborou com R\$ 13,00, outro com R\$ 14,00 e o terceiro com R\$ 22,00. Eles foram sorteados e receberam um prêmio de R\$ 7.350,00, que será dividido em partes diretamente proporcionais ao que cada um contribuiu no bolão. O valor que receberá o amigo que contribuiu com a menor quantia será

- a) R\$ 1.950,00.
- b) R\$ 2.000,00.
- c) R\$ 2.050,00.
- d) R\$ 2.100,00.
- e) R\$ 2.150,00.



16. (VUNESP/Pref. F.co Morato/2019) Uma imobiliária irá dividir um bônus de R\$ 7.500,00 entre os vendedores Manoel e Pedro, por serem os que mais vendas realizaram durante o último ano. Esse bônus será dividido de forma diretamente proporcional ao número de anos que esses vendedores trabalham na imobiliária. Sabendo que o número de anos que Manoel e Pedro trabalham nessa imobiliária são, respectivamente, 2 e 3, então, a diferença entre os valores recebidos por eles foi

- a) R\$ 2.300,00.
- b) R\$ 2.000,00.
- c) R\$ 1.800,00.
- d) R\$ 1.500,00.
- e) R\$ 1.200,00.

17. (VUNESP/Pref Guaratinguetá/2019) Pedro e João montaram uma sociedade com certo capital, sendo que a diferença dos valores dos capitais investidos por Pedro e por João foi igual a R\$ 7.850,00. Ao final de um mês do investimento, ambos dividiram o primeiro lucro em partes diretamente proporcionais aos capitais investidos, sendo R\$ 52,00 a parte do lucro recebida por João e R\$ 156,00 a parte do lucro recebida por Pedro. Assim, pode-se concluir corretamente que o capital total por eles investido foi de

- a) R\$ 15.700,00.
- b) R\$ 15.900,00.
- c) R\$ 16.100,00.
- d) R\$ 16.300,00.
- e) R\$ 15.500,00.

18. (VUNESP/MPE SP/2019) Uma empresa distribui títulos de cobrança para quatro agências de cobrança: A, B, C e D em quantidades iguais de títulos. A agência A é a mais produtiva, consegue cobrar 80% dos títulos, a agência B cobra 60%, a C e a D cobram 30% cada uma. A empresa deseja fazer com que as agências sejam mais competitivas e planeja distribuir os títulos de forma proporcional aos números que elas estão produzindo, ou seja, proporcional aos números 80, 60, 30 e 30. Então, a agência A receberá a porcentagem de títulos para cobrança de:

- a) 80%
- b) 60%
- c) 50%
- d) 40%
- e) 25%



19.(VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três máquinas X, Y e Z produziram 2 640 peças de certo jogo, cada peça produzida sempre em um mesmo tempo. A máquina X produziu 820 peças, tendo funcionado por 1 hora e 30 minutos a menos do que a máquina Y. A máquina Z funcionou por 6 horas e 50 minutos e produziu um total de peças igual a

- a) 800.
- b) 820.
- c) 840.
- d) 860.
- e) 880.

20. (VUNESP/CM Jales/2018) Gabriela, Rafaela e Marcela organizaram vários arquivos para uma tia. Cada uma delas organizou a mesma quantidade de arquivos e ficou combinado que elas dividiriam R\$ 1.245,00 em partes inversamente proporcionais ao tempo que cada uma levou na organização. Marcela ganhou R\$ 300,00, e o tempo trabalhado por Gabriela foi 80% do tempo que Rafaela trabalhou. Gabriela recebeu por esse trabalho a quantia de

- a) R\$ 510,00.
- b) R\$ 515,00.
- c) R\$ 520,00.
- d) R\$ 525,00.
- e) R\$ 530,00.

21. (VUNESP/Pref. Campinas/2019) Três amigos dividiram 920 figurinhas em partes inversamente proporcionais às suas idades. Um amigo recebeu 360 figurinhas e outro 240. Se o mais velho desses amigos tem 12 anos, a soma das idades desses três amigos, em anos, é

- a) 25.
- b) 23.
- c) 29.
- d) 27.
- e) 31.



GABARITO – VUNESP

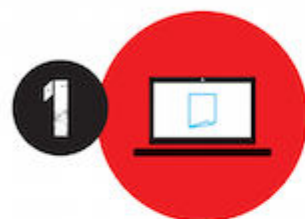
Proporções

1. LETRA B
2. LETRA B
3. LETRA B
4. LETRA D
5. LETRA E
6. LETRA B
7. LETRA E
8. LETRA B
9. LETRA B
10. LETRA E
11. LETRA E
12. LETRA D
13. LETRA C
14. LETRA C
15. LETRA A
16. LETRA D
17. LETRA A
18. LETRA D
19. LETRA B
20. LETRA D
21. LETRA C



ESSA LEI TODO MUNDO CONHECE: PIRATARIA É CRIME.

Mas é sempre bom revisar o porquê e como você pode ser prejudicado com essa prática.



1 Professor investe seu tempo para elaborar os cursos e o site os coloca à venda.



2 Pirata divulga ilicitamente (grupos de rateio), utilizando-se do anonimato, nomes falsos ou laranjas (geralmente o pirata se anuncia como formador de "grupos solidários" de rateio que não visam lucro).



3 Pirata cria alunos fake praticando falsidade ideológica, comprando cursos do site em nome de pessoas aleatórias (usando nome, CPF, endereço e telefone de terceiros sem autorização).



4 Pirata compra, muitas vezes, clonando cartões de crédito (por vezes o sistema anti-fraude não consegue identificar o golpe a tempo).



5 Pirata fere os Termos de Uso, adultera as aulas e retira a identificação dos arquivos PDF (justamente porque a atividade é ilegal e ele não quer que seus fakes sejam identificados).



6 Pirata revende as aulas protegidas por direitos autorais, praticando concorrência desleal e em flagrante desrespeito à Lei de Direitos Autorais (Lei 9.610/98).



7 Concurseiro(a) desinformado participa de rateio, achando que nada disso está acontecendo e esperando se tornar servidor público para exigir o cumprimento das leis.



8 O professor que elaborou o curso não ganha nada, o site não recebe nada, e a pessoa que praticou todos os ilícitos anteriores (pirata) fica com o lucro.



Deixando de lado esse mar de sujeira, aproveitamos para agradecer a todos que adquirem os cursos honestamente e permitem que o site continue existindo.